# Schnellkurs und Übersicht zur Größtfehlerabschätzung und Fehlerrechnung

## Zum Messergebnis gehören immer eine Fehlerangabe und nur signifikante Stellen

1. Beim Messen arbeiten wir mit Näherungswerten! Selbst die von uns täglich verwendeten Basiseinheiten, wie m, kg, s,..., sind nur mit bestimmten Genauigkeiten festgelegt, die natürlich die Genauigkeiten der von uns verwendeten Messgeräte um Größenordnungen übertreffen.

2. Messgeräte besitzen nur eine bestimmte Ablesegenauigkeit, die durch die Skalenteilung vorgegeben ist. Zum Beispiel können Sie bei Messungen mit einem Lineal nur auf den Millimeter genau ablesen, im allerbesten Fall auf $\pm 0{,}5$ mm (=1/2 Skalenteil) schätzen oder unter schlechteren Bedingungen (rauhe Kante des Werkstücks oder Strichstärke von Linien) nur auf z.B. $\pm 2$ mm genau messen. Es unterliegt also Ihrer Einschätzung eine Messunsicherheit (den sogenannten Messfehler) realistisch anzugeben.

3. Darüber hinaus haben alle Messgeräte einen - vom Hersteller angegebenen - systematischen Restfehler. Ein vierstelliges Digitalgerät im 20 V Messbereich kann nur auf 10 mV genau abgelesen werden (z.B. 18,13 V). Oft ist der Restfehler, der sich aus prozentualem Fehler und Digitfehler zusammensetzt, jedoch größer als die Ablesegenauigkeit. Der Digitfehler ist die Schwankungsbreite der letzten Stelle (LSB: last significant bit), beträgt mindestens ±1LSB (±1Digit) und ist der Quantisierungsfehler, der bei der AD-Wandlung entsteht. Beträgt der systematische Restfehler z.B. 2,5 % ±5 Digit, wäre das anzugebende Ergebnis (18,1±0,5)V.

4. Schätzen Sie bei jeder Messung die Messungenauigkeiten (Messfehler) des verwendeten Messverfahrens realistisch ab (Genauigkeit und Teilung der Anzeige, Ablesegenauigkeit, systematischer Restfehler) und geben Sie zu ihrem Messwert stets den größten Fehler, den sogenannten Größtfehler an. Der Größtfehler ist eine physikalische Größe und hat immer die Einheit der Messgröße.

5. Geben Sie beim Ergebnis nur die signifikanten Stellen an. Die Anzahl dieser Stellen wird vom Größfehler bestimmt. Die Messwert wird nicht genauer angegeben als es die Messunsicherheit zulässt. Beachten Sie, dass z.B. die Angaben (3,5±0,2)kg und (3,50±0,15)kg etwas anders bedeuten.

6. Tragen Sie die Größtfehler als Fehlerbalken an den Messpunkten in ihre Diagramme ein.

## Fehlerfortpflanzung bei indirekt messbaren Größen (Größtfehlerabschätzung)

Viele Messgrößen sind nur indirekt messbar. Auch für diese müssen Fehlerabschätzungen vorgenommen werden. Der Größtfehler indirekt messbarer Größen ergibt sich aus der Fehlerfortpflanzung der Größtfehler der direkt gemessenen Größen:

1. Die Größe $y = T^2$ ist nur indirekt messbar. Wie groß ist ihre Messunsicherheit, wenn für die direkt gemessene Größe $T$ der Größtfehler $\Delta T$ festgelegt wurde? Zu untersuchen wäre die Änderung der Größe $y$, wenn die Größe $T$ um $\pm\Delta T$ schwankt. Diese Änderung kann sofort durch den Anstieg $\frac{dy}{dT}$ erhalten werden. Es gilt:
$$\Delta y = \frac{dy}{dT}\Delta T \quad .$$
Daraus erhält man den Größtfehler von $T^2$ zu $\Delta(T^2) = 2T \cdot \Delta T$. Man sieht, dass der Größtfehler $\Delta(T^2)$ nicht nur von $\Delta T$, welches ja für alle Messwerte $T$ konstant sein kann, sondern zusätzlich vom Messwert $T$ abhängt und zusammen mit $T$ wächst oder fällt. Das ist verständlich, da der Anstieg eine Funktion von $T$ ist.

2. Meist sind indirekt messbare Größen, wie z.B. Dichte oder Geschwindigkeit, nur über die Messung von mehreren direkt messbaren Größen bestimmbar. Allgemein gesprochen sei die Größe $F = f(x, y, z)$ nur über die gemessenen Größen $x \pm \Delta x$, $y \pm \Delta y$ und $z \pm \Delta z$ bestimmbar ($\Delta x$, $\Delta y$, ... seien die Größtfehler). Gesucht ist nun der Größtfehler $\Delta F$. Auch hier sind die Anstiege der einzelnen Abhängigkeiten (partielle Differentiation) entscheidend. Für den Größtfehler $\Delta F$ gilt generell:
$$\Delta F = \pm\left\{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial z}\Delta z\right|\right\} \quad . \tag{1}$$
Da es sich um einen Größtfehler handelt, werden die Beträge addiert. Die Formel erscheint kompliziert, ist aber einfach handhabbar. Ein Beispiel sei das Volumen eines Zylinders $V = h\pi d^2/4$, mit dem Durchmesser $d \pm \Delta d$ und der Höhe $h \pm \Delta h$. Die Ableitungen sind $\frac{\partial V}{\partial h} = \pi d^2/4$ und $\frac{\partial V}{\partial d} = h\pi d/2$. Eingesetzt ergibt das:
$$\Delta V = \pm\left\{\left|\frac{\pi d^2}{4}\Delta h\right| + \left|\frac{h\pi d}{2}\Delta d\right|\right\} \quad .$$
Alle Größen sind schnell eingesetzt und der Größtfehler $\Delta V$ kann sofort berechnet werden. Er hat hier die Dimension eines Volumens.

3. Es geht aber noch einfacher: Oft ist der relative Fehler aussagekräftiger als der absolute Fehler, da dabei der Fehler in Relation zur Messgröße gesetzt wird. Der relative Größtfehler der Messgröße $x$ wird definiert als $\frac{\Delta x}{x}$ oder als prozentualer Größtfehler $\frac{\Delta x}{x} \cdot 100$ in Prozent. Berechnet man im obigen Beispiel den relativen Größtfehler, so folgt:
$$\frac{\Delta V}{V} = \pm\left\{\left|\frac{\frac{\pi d^2}{4}\Delta h}{\frac{h\pi d^2}{4}}\right| + \left|\frac{\frac{h\pi d}{2}\Delta d}{\frac{h\pi d^2}{4}}\right|\right\} = \pm\left\{\left|\frac{\Delta h}{h}\right| + \left|2\frac{\Delta d}{d}\right|\right\} \quad .$$

Daraus ergibt sich folgender Merksatz:
*Bei einer multiplikativen Verknüpfung (Multiplikation und Division) der Messgrößen addieren sich die Beträge der relativen Größtfehler der einzelnen Messgrößen.* Noch einfacher gesagt: *Die prozentualen Größtfehler addieren sich bei multiplikativer Verknüpfung.*
Beachten Sie dabei, dass die relativen Größtfehler der Größen, die mit der Potenz $n$ eingehen, $n$ -mal berücksichtigt werden müssen.

4. *Bei einer additiven Verknüfung von Messgrößen (es kann sich dabei ja nur um gleiche Größen, wie zum Beispiel Temperaturen, handeln) addieren sich die Beträge der absoluten Größtfehler.* Bestimmt man eine Temperaturdifferenz aus den Messwerten $T_1 \pm \Delta T$ (z.B. $300\,\mathrm{K} \pm 1\,\mathrm{K}$) und $T_2 \pm \Delta T$ (z.B. $290\,\mathrm{K} \pm 1\,\mathrm{K}$), so ergibt sich $(T_1 - T_2) \pm 2\Delta T$ (also $10\,\mathrm{K} \pm 2\,\mathrm{K}$).

5. Bei multiplikativer und additiver Verknüpfung in einer Formel kann man die oben genannten Rechenregeln auch stückweise benutzen. Schneller und einfacher geht es jedoch, wenn man gleich über die partiellen Ableitungen geht.

6. Rechenregeln zur Größtfehlerabschätzung für einige funktionale Zusammenhänge zwischen indirekter Messgröße $F$ und den direkten Messgrößen $x \pm \Delta x$ und $y \pm \Delta y$:

| Funktionaler Zusammenhang | Ableitungen | Größtfehler$\Delta F$ | Relativer Fehler $\frac{\Delta F}{F}$ |
|---|---|---|---|
| $F = \sin x$ | $\frac{dF}{dx} = \cos x$ | $\lvert \cos x\, \Delta x \rvert$ | $\left\lvert \frac{1}{\tan x}\, \Delta x \right\rvert$ |
| $F = \ln x$ | $\frac{dF}{dx} = \frac{1}{x}$ | $\left\lvert \frac{1}{x}\, \Delta x \right\rvert$ | $\left\lvert \frac{\Delta x}{x \ln x} \right\rvert$ |
| $F = xy$ | $\frac{dF}{dx} = y$ | | |
| | $\frac{dF}{dy} = x$ | $\lvert y\, \Delta x \rvert + \lvert x\, \Delta y \rvert$ | $\left\lvert \frac{\Delta x}{x} \right\rvert + \left\lvert \frac{\Delta y}{y} \right\rvert$ |
| $F = \frac{x}{y}$ | $\frac{dF}{dx} = \frac{1}{y}$ | | |
| | $\frac{dF}{dy} = -\frac{x}{y^2}$ | $\left\lvert \frac{1}{y}\, \Delta x \right\rvert + \left\lvert \frac{x}{y^2}\, \Delta y \right\rvert$ | $\left\lvert \frac{\Delta x}{x} \right\rvert + \left\lvert \frac{\Delta y}{y} \right\rvert$ |
| $F = x^2$ | $\frac{dF}{dx} = 2x$ | $\lvert 2x\, \Delta x \rvert$ | $\left\lvert 2\frac{\Delta x}{x} \right\rvert$ |
| $F = \tan x$ | $\frac{dF}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $\left\lvert \frac{1}{\cos^2 x} \Delta x \right\rvert$ | $\left\lvert \frac{\Delta x}{\sin x \cos x} \right\rvert$ |
| $F = x \pm y$ | $\frac{dF}{dx} = 1$ | | |
| | $\frac{dF}{dy} = \pm 1$ | $\lvert \Delta x \rvert + \lvert \Delta y \rvert$ | $\frac{\lvert \Delta x \rvert + \lvert \Delta y \rvert}{\lvert x \pm y \rvert}$ |

## Die Möglichkeit der Verkleinerung der Messfehler (Messungenauigkeiten) durch vielfach wiederholte Messung einer Größe (Fehlerrechnung bzw. -statistik)

In den meisten Experimenten wird man mit einer Messung, einer zusätzlichen Kontrollmessung und dem abgeschätzten Größtfehler arbeiten müssen. Wenn man viel Aufwand treibt, kann man die Messungenauigkeiten einer direkt gemessenen Größe verkleinern, indem man z.B. ein und dieselbe Messung sehr oft ($n$-mal) wiederholt und dann eine sogenannte Fehlerstatistik durchführt.

Der *wahrscheinlichste Wert* der direkt gemessenen Größe $x$ (Messwerte $x_i$ mit $i = 1, ..., n$ und $n \geq 6$) ist dann der arithmetische Mittelwert $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Man definiert die Abweichungen der Messwerte vom wahrscheinlichsten Wert als $v_i = \overline{x} - x_i$. Wenn diese Abweichungen symmetrisch um den wahrscheinlichsten Wert streuen, verschwindet ihre Summe (gleich viele positive und negative Abweichungen) und man spricht von zufälligen Fehlern mit einer statistischen Fehlerverteilung (Gaußsche Glockenkurve).

Man definiert den *mittleren Fehler der Einzelmessung (Standardabweichung)* als

$$s_X = \pm\sqrt{\frac{\sum(v_i)^2}{n-1}} \quad .$$

Diese Standardabweichung besagt, dass zwischen den Werten $\bar{x} - s_X$ und $\bar{x} + s_X$ ca. 68 % aller Messwerte liegen bzw. ein beliebiger Messwert mit 68%-iger Wahrscheinlichkeit in diesem Bereich zu finden ist. Dieser Bereich ist genau der von den Wendepunkten der Glockenkurve eingeschlossene Bereich. Die Standardabweichung gibt die Toleranz einer einzelnen Messung an.

Für uns wichtiger ist der *mittlere Fehler des Mittelwerts*, also der mittlere Fehler des wahrscheinlichsten Werts unserer Messgröße: Dieser Fehler wird auch *Vertrauensbereich* genannt:

$$\overline{s_X} = \pm\sqrt{\frac{\sum(v_i)^2}{n(n-1)}} \quad .$$

Das Ergebnis der vielfach wiederholten Messung einer direkt gemessenen physikalischen Größe lautet also (Mittelwert plus/minus Vertrauensbereich):

$$\overline{x} \pm \overline{s_X} \quad .$$

Für die Bestimmung des Vertrauensbereichs $\overline{s_F}$ einer indirekt gemessenen Größe $F = f(x, y, ...)$ aus den Messgrößen $\overline{x} \pm \overline{s_X}$ und $\overline{y} \pm \overline{s_Y}$ wird wieder die Fehlerfortpflanzung verwendet. Bei statistisch ermittelten Fehler ersetzt man die lineare Addition ($c = a + b$) durch eine *pythagoräische Addition* ($c = \sqrt{a^2 + b^2}$), da man hier davon ausgeht, dass sich Fehler auch zum Teil kompensieren können (Die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist kürzer als die Summe der beiden Katheten). Für die Fehlerfortpflanzung gilt deshalb (vgl. Gleichung (1)):

$$\overline{s_F} = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\overline{s_X}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\overline{s_Y}\right)^2 + ...} \quad .$$

Der relative Fehler der indirekt gemessenen Größe $F$ ist dann definiert als $\overline{s_F}/F$.

Die oben genannte Rechenregeln gelten auch für den Fall der Fehlerfortpflanzung mit Vertrauensbereichen, nur das hierbei nicht linear, sondern pythagoräisch addiert wird:

1. *Bei multiplikativer Verknüpfung der Messgrößen addieren sich die relativen Fehler pythagoräisch.*
2. *Bei additiver Verknüpfung der Messgrößen addieren sich die absoluten Fehler der Messgrößen pythagoräisch.*

In Fällen, in denen nur eine von mehreren Messgrößen vielfach gemessen wurde, ist natürlich wieder die Größtfehlerabschätzung mit linearer Addition zu verwenden. Als Größtfehler der vielfach gemessenen Größe wird dann der Vertrauensbereich eingesetzt, für alle anderen Größen deren Größtfehler.