

## *Faraday Rotation (A11)*

### *Ziel des Versuches*

Die Verdet-Konstante, die die Drehung der Polarisationssebene von Licht beim Durchgang durch ein dielektrisches Medium im axialen Magnetfeld beschreibt, wird bei verschiedenen Wellenlängen gemessen. Aus den Ergebnissen sollen bei vorgegebenen Dispersionswerten  $n(\lambda)$  und  $dn/d\lambda$  die effektive Oszillatormasse der Dispersionselektronen, die Anzahl der Dispersionselektronen und die Lage der Modellresonanz ermittelt werden. Zur Messung der sehr kleinen Drehwinkel muss ein Modulationsverfahren verwendet werden.

### *Einleitung*

Als Faraday-Rotation bezeichnet man die Drehung der Polarisationssebene von linear polarisiertem Licht beim Durchgang durch ein transparentes Medium, das einem axialen Magnetfeld ausgesetzt ist. Dabei handelt es sich um eine magnetfeldinduzierte Doppelbrechung, die ihre Ursache in der Zeeman-Aufspaltung einer Resonanzlinie hat. Es entstehen zwei entsprechend der Größe der Aufspaltung gegeneinander verschobene Dispersionskurven, die die Ausbreitungseigenschaften von links- und rechtszirkular polarisiertem Licht im Medium beschreiben. Damit existieren auch fernab von dieser Resonanz im niederenergetischen, transparenten Bereich des Mediums unterschiedliche Brechungsindizes für links- und rechtszirkular polarisiertes Licht. Einfallendes linear polarisiertes Licht wird im Medium in links- und rechtszirkular polarisiertes Licht, das sich wegen den unterschiedlichen Brechungsindizes verschieden schnell ausbreitet, zerlegt. Beim Verlassen des Mediums ergibt sich aus der Überlagerung wieder linear polarisiertes Licht, wobei dessen Polarisationssebene gegenüber der des einfallendes Lichts gedreht ist. Die Größe der Drehung wächst sowohl mit steigender magnetischer Flussdichte als auch der Länge des doppelbrechenden Mediums und hängt von dessen Dispersionseigenschaften ab.

Da der Drehsinn der Polarisationssebene unabhängig von der Durchstrahlrichtung gleich bleibt, wird dieser Effekt gern in der Hochleistungslasertechnik eingesetzt. Sogenannte Faraday-Isolatoren werden als optische Dioden verwendet, um unerwünschte Rückreflexionen in den Laser auszuschließen.

## Theoretischer Hintergrund

### Dispersion im dielektrischen Medium Glas

Im Versuch wird als Medium ein Glasquader verwendet. Glas ist ein amorpher Festkörper, der im Wesentlichen aus Siliziumdioxid und unterschiedlichen Zusatzstoffen besteht. Es ist im sichtbaren Spektralbereich transparent und besitzt verschiedene Absorptionsbanden (optische Übergänge) sowohl im infraroten als auch im ultravioletten Spektralbereich. Die optischen Eigenschaften werden durch die Dispersion, also den i. A. komplexen Brechungsindex  $\tilde{n}(\lambda) = n(\lambda) + i\kappa(\lambda)$ , beschrieben. Die Dispersionskurve des Realteils  $n(\lambda)$  im sichtbaren Spektralbereich wird allein bestimmt durch alle hochenergetischen, also im Ultravioletten liegenden, optischen Übergänge im Glas. Fasst man alle hochenergetischen optischen Übergänge zu einer einzigen „Modellresonanz“ zusammen, so ergibt sich die schematisch in Abb. 1 dargestellte Dispersionskurve. Im Bereich der Resonanz erhält man anomale Dispersion, außerhalb der Resonanz normale Dispersion, also eine Abnahme des Brechungsindex mit zunehmender Wellenlänge. Man kann die Lage und Übergangsstärke dieser Modellresonanz ermitteln, indem man die für verschiedene Wellenlängen im sichtbaren Bereich gemessenen Brechungsindizes (Prismenspektrometer, Ellipsometer) mit einem Ein-Oszillator-Modell (Sellmeier-Gleichung) anpasst.

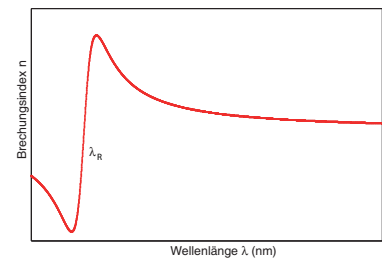


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Verlaufes des Realteils des Brechungsindex bei einer Resonanz (Ein-Oszillatormodell) bei  $\lambda_R$

### Zeeman-Aufspaltung im Axialfeld

Die Aufspaltung von Spektrallinien im Magnetfeld wird als Zeeman-Effekt bezeichnet. Der normale Zeeman-Effekt (nur Einbeziehung des Bahnmagnetismus) kann mit der klassischen Elektronentheorie, also einer Kreisbewegung des Elektrons, gut beschrieben werden. Dabei wird die Kreisbewegung mit der Frequenz  $\omega_0$  in zwei Oszillationen, senkrecht und parallel zum Magnetfeld, zerlegt. Die Oszillation senkrecht zum Magnetfeld kann weiterhin auch als Überlagerung zweier entgegengesetzt zirkularer Schwingungen dargestellt werden, sodass die klassische Theorie von insgesamt drei sogenannten Ersatzelektronen spricht (siehe Abb. 2).

Im Magnetfeld erfährt das parallel zum Magnetfeld schwingende Elektron keine Kräfteinwirkung, sodass sein emittiertes Licht parallel zum Magnetfeld polarisiert ist, die ursprüngliche Frequenz  $\omega_0$  besitzt und nur in transversaler Richtung beobachtbar ist. Die beiden entgegengesetzt zirkular und senkrecht zum Magnetfeld schwingenden Ersatzelektronen 2 und 3 erfahren durch das Magnetfeld die Wirkung der Lorentzkraft und werden je nach Umlaufsinn bzw. Magnetfeldrichtung positiv oder negativ beschleunigt, sodass sie mit einer um  $\pm\Delta\omega_{\text{Zeeman}} = \mu_B B/\hbar$  geänderten Frequenz entgegengesetzt zirkular polarisiertes Licht emittieren.<sup>1</sup> Bei axialer Beobachtung in Magnetfeldrichtung (elektrischer Feldvektor des Lichtes  $\vec{E} \perp \vec{B}$  bzw. Wellenvektor  $\vec{k} \parallel \vec{B}$ )<sup>2</sup> sind demnach nur die linkszirkular ( $\sigma^-$ ) und rechtszirkular ( $\sigma^+$ ) polarisierten Emissionen beobachtbar, die sich in ihrer Frequenz um  $2\Delta\omega_{\text{Zeeman}} = 2\mu_B B/\hbar$  unterscheiden.

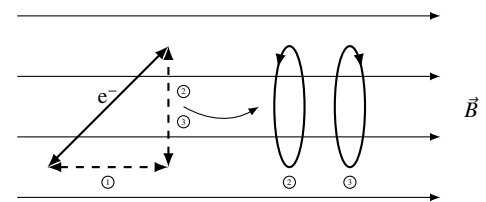


Abbildung 2: Ersatzelektronen zur klassischen Erklärung des Zeeman-Effektes

<sup>1</sup> Dabei ist  $\mu_B$  das Bohrsche Magneton und  $B$  der Betrag der magnetischen Flussdichte.

<sup>2</sup>  $\vec{B}$  ist dabei die Flussdichte des externen axialen Magnetfelds.

Die für den Verlauf der Dispersionskurve verantwortliche Modellresonanz (optischer Übergang zwischen zwei Niveaus) wird, sofern eine Entartung der Niveaus bezüglich der Quantenzahl  $m$  vorliegt, im magnetischen Feld aufspalten. Aus der Atomphysik ist bekannt, dass die  $(2l + 1)$ -fach entarteten  $m$ -Zustände bei vorgegebenen  $n, l$ -Werten im äußeren Magnetfeld in die  $(2l + 1)$  Zeeman-Niveaus aufspalten. Hier sind  $n, l, m$  die Haupt-, die Drehimpuls- und die magnetische Quantenzahl des Drehimpulses.

Die Abb. 3 verdeutlicht beispielhaft die Aufhebung der Entartung im axialen Magnetfeld und mögliche optische Übergänge entsprechend der dafür geltenden Auswahlregel  $\Delta m = \pm 1$ . Der energetische Abstand zwischen den einzelnen Zeeman-Niveaus beträgt:<sup>3</sup>

$$\Delta W_{\text{Zeeman}} = \hbar \Delta \omega = \mu_B B = \frac{e \hbar}{2 m_e^*} B \quad .$$

Die jeweils drei  $\sigma^-$ - bzw.  $\sigma^+$ - Übergänge haben die gleiche Energie und können daher zu insgesamt zwei Resonanzübergängen ( $\sigma^-$  und  $\sigma^+$ ) zusammengefasst werden. Die Energiedifferenz zwischen den  $\sigma^-$ - und  $\sigma^+$ - Übergängen beträgt dann

$$\Delta \tilde{E} = 2 \Delta W_{\text{Zeeman}} = \frac{e \hbar}{m_e^*} B \quad . \quad (1)$$

Aus  $\tilde{E} = hf = hc/\lambda$  folgt

$$\Delta \lambda = -\frac{\lambda^2}{hc} \Delta \tilde{E} \quad . \quad (2)$$

Setzt man Gl. (1) in Gl. (2) ein, so erhält man die durch Zeeman-Aufspaltung erzeugte Wellenlängendifferenz zwischen den  $\sigma^-$ - und  $\sigma^+$ - Oszillatoren im magnetischen Axialfeld zu

$$\Delta \lambda = -\frac{\lambda^2}{hc} \frac{e \hbar}{m_e^*} B \quad . \quad (3)$$

In Abb. 4 ist die durch den Zeeman-Effekt in zwei Oszillatoren aufgespaltene Modellresonanz schematisch dargestellt. Auch fernab von den Resonanzen, also auch im sichtbaren und für Glas transparenten Spektralbereich, unterscheiden sich die Brechungsindizes  $n_l$  und  $n_r$  für links- und rechtszirkular polarisiertes Licht, das sich im Glas im axialen Magnetfeld ausbreiten kann.

### Drehung der Polarisationssebene durch Doppelbrechung im magnetischen Axialfeld

Die in  $z$ -Richtung einfallende linear polarisierte Lichtwelle wird im doppelbrechenden Medium (Länge  $L$ ,  $0 < z < L$ ) in eine links- und eine rechtszirkular polarisierte Welle  $E_l$  bzw.  $E_r$  zerlegt, sodass gilt:<sup>4</sup>

$$E = E_r + E_l = \frac{E_0}{2} \exp i(\omega t - k_r z) + \frac{E_0}{2} \exp -i(\omega t - k_l z) \quad . \quad (4)$$

Bei  $z = 0$  lag also eine linear polarisierte Welle  $E(z = 0) = E_r + E_l = E_0 \cos \omega t$  vor. Aufgrund der unterschiedlichen Wellenzahlen  $k_{r,l} = k_0 n_{r,l} = (\omega/c) n_{r,l}$  breiten sich beide Wellen im doppelbrechenden Medium mit unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten  $v_{r,l} = c/n_{r,l}$  aus. Dabei sind  $n_l$  und

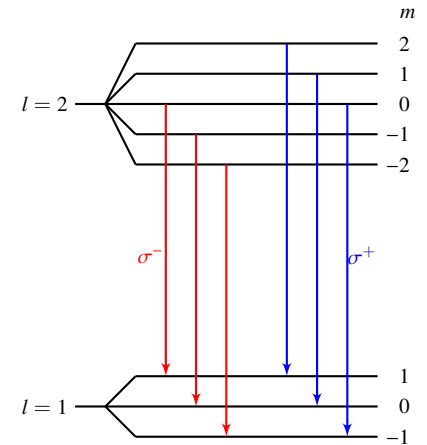


Abbildung 3: Beispiel für die Aufhebung der Entartung im magnetischen Axialfeld

<sup>3</sup>  $m_e^*$  ist die effektive Oszillatormasse der Elektronen und wird weiter unten näher erklärt.

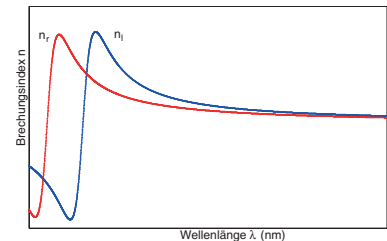


Abbildung 4: Verlauf der Brechungsindizes  $n_l$  und  $n_r$  nach Zeeman-Aufspaltung der Resonanz im magnetischen Axialfeld. Der Abstand beider Resonanzen ist gleich der doppelten Zeeman-Aufspaltung.

<sup>4</sup> Alternativ in Vektordarstellung:

$$E_l = \frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} \cos \dots \\ -\sin \dots \end{pmatrix}$$

$$E_r = \frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} \cos \dots \\ \sin \dots \end{pmatrix}$$

$n_r$  die Brechungsindizes für links- bzw. rechtszirkular polarisiertes Licht und  $c$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Beim Austritt, also bei  $z = L$ , überlagern sich beide zirkular polarisierten Wellen wieder zu einer linear polarisierten Welle. Es gilt:

$$E_{z=L} = \frac{1}{2} E_0 [\exp i(\omega t - k_r L) + \exp -i(\omega t - k_l L)] = \frac{1}{2} E_0 (\exp i\alpha + \exp -i\alpha \cdot \exp i\beta)$$

mit  $\alpha = \omega t - k_r L$  und  $\beta = (k_l - k_r) L = \frac{\omega}{c} (n_l - n_r) L$ .

Wegen

$$E_{z=L} = \frac{1}{2} E_0 (\exp i\alpha + \exp -i\alpha \cdot \exp i\beta) = E_0 \exp\left(i\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)$$

ergibt sich:

$$E_{z=L} = E_0 \exp i\left(\frac{\omega}{2c}(n_l - n_r)L\right) \cdot \cos\left(\omega t - \frac{k_l + k_r}{2}L\right)$$

Die austretende linear polarisierte Welle ist gegenüber der einfallenden Welle phasenverschoben und hat eine Drehung der Polarisationssebene um den Winkel  $\theta$  erfahren:

$$\theta = \frac{\omega}{2c} (n_l - n_r) L = \frac{2\pi f}{2c} (n_l - n_r) L = \frac{\pi}{\lambda} (n_l - n_r) L \quad , \quad (5)$$

wobei  $\lambda$  die Vakuumwellenlänge des eingestrahnten Lichtes ist.

Bei Kenntnis der Dispersionskurve  $n = n(\lambda)$  des Mediums lässt sich ein kleiner Brechungsindexunterschied  $\Delta n = n_l - n_r$  linear wie folgt nähern:

$$\Delta n = \Delta\lambda \frac{dn}{d\lambda} \quad .$$

Damit lässt sich Gl. (5) umschreiben zu:

$$\theta = \frac{\pi}{\lambda} \Delta\lambda \frac{dn}{d\lambda} L \quad . \quad (6)$$

Einsetzen von Gl. (3) in Gl. (6) liefert:

$$\theta = -\frac{\pi \lambda^2}{\lambda} \frac{e\hbar}{hc m_e^*} \frac{dn}{d\lambda} \cdot B \cdot L = -\frac{1}{2} \frac{e}{m_e^* c} \lambda \frac{dn}{d\lambda} \cdot B \cdot L = V \cdot B \cdot L \quad . \quad (7)$$

$$V = -\frac{1}{2} \frac{e}{m_e^* c} \lambda \frac{dn}{d\lambda} \quad . \quad (8)$$

Das ist die von Becquerel 1897 [1] abgeleitete Formel für die Drehung der Polarisationssebene von Licht beim Durchgang durch dielektrische Medien im axialen Magnetfeld. Die Größe  $V$  wird als verdetische Konstante bezeichnet, die von der Wellenlänge, der Dispersion und der effektiven Oszillatormasse abhängt.

### *Effektive Oszillatormasse und Dispersion*<sup>5</sup>

Im Gegensatz zu freien Elektronen sind die Elektronen im Festkörper gebunden und befinden sich im Potential der Atomkerne. Pro Atom tritt nur eine effektive Anzahl von Elektronen in Wechselwirkung mit einfallendem Licht. Nur diese Elektronen bestimmen die optischen Eigenschaften des Festkörpers und werden oft als Dispersionselektronen bezeichnet. Daher wird im

<sup>5</sup> Dieser Abschnitt soll Ihnen die Herkunft der für uns wichtigen Dispersionsrelation (Gl. 9) zeigen.

folgenden Oszillatormodell nicht die freie Elektronenmasse, sondern die effektive Oszillatormasse  $m_e^*$  eines Dispersionselektrons benutzt. Die Bewegungsgleichung für ein ungedämpftes Dispersionselektron im Lichtfeld und im magnetischen Axialfeld lautet:<sup>6</sup>

$$m_e^* \ddot{\vec{x}} + D \dot{\vec{x}} = -e (\vec{E} + \vec{v} \times B \vec{e}_z) \quad .$$

Dabei ist  $D = \omega_0^2 m_e^*$  die Federkonstante, die Größe  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(kz - \omega t)$  die einfallende Lichtwelle,  $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$  die Geschwindigkeit und  $B$  der Betrag der magnetische Flussdichte. Auf einen Dämpfungsterm wird verzichtet, da die Dispersionskurve fernab von der Resonanz vom Dämpfungsterm kaum beeinflusst wird. Mit einem Ansatz  $\vec{x} = \vec{x}_0 \exp i(kz - \omega t)$  erhält man

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \vec{x}_0 - \frac{i\omega e B}{m_e^*} \vec{x}_0 \times \vec{e}_z = \frac{e}{m_e^*} \vec{E}_0 \quad .$$

Es ist offensichtlich, dass die gesuchte Auslenkung der Elektronen in der  $x, y$ -Ebene stattfindet. In einer neu zu definierenden Vektorbasis mit den Einheitsvektoren  $\vec{e}_+$  und  $\vec{e}_-$  mit gegenläufigem Umlaufsinn und den Eigenschaften

$$\vec{e}_\pm \times \vec{e}_z = \frac{\vec{e}_x \pm i \vec{e}_y}{\sqrt{2}} \times \vec{e}_z = \frac{-\vec{e}_y \mp i \vec{e}_x}{\sqrt{2}} = \pm i \frac{\vec{e}_x \pm i \vec{e}_y}{\sqrt{2}} = i \vec{e}_\mp$$

lassen sich die gesuchten Auslenkungen der beiden zirkularen Komponenten getrennt berechnen<sup>7</sup> zu:

$$x_{0\pm} = -\frac{e}{m_e^*} \frac{E_\pm \exp i(k_{1,r}z - \omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2 \mp \omega \frac{eB}{m_e^*}} \quad .$$

Die Gesamtpolarisation des Mediums ergibt sich dann zu

$$\vec{P} = -Ne (x_{0-} \vec{e}_+ + x_{0+} \vec{e}_-) = P_l \vec{e}_+ + P_r \vec{e}_- \quad ,$$

wobei  $N$  die Gesamtzahl der Dispersionselektronen pro Kubikzentimeter ist. Für den Betrag der Polarisationen gilt:

$$P_{l,r} = \frac{Ne^2}{m_e^*} \frac{E_\pm \exp i(k_{1,r}z - \omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2 \mp \omega \frac{eB}{m_e^*}} \quad .$$

Mit der Beziehung  $P = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E$  erhält man die Dielektrizitätsfunktionen  $\epsilon_{l,r}$  und wegen  $\sqrt{\epsilon} = n$  die Quadrate der Brechungsindizes für links- und rechtszirkulares Licht

$$n_{l,r}^2 = \epsilon_{l,r} = 1 + \frac{Ne^2}{m_e^* \epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 \mp \omega \frac{eB}{m_e^*}} \quad . \quad (9)$$

Als Differenz ergibt sich

$$n_l^2 - n_r^2 = \frac{Ne^2}{m_e^* \epsilon_0} \frac{2\omega \frac{eB}{m_e^*}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \left(\frac{eB}{m_e^*}\right)^2} \cong \frac{Ne^2}{m_e^* \epsilon_0} \frac{2\omega \frac{eB}{m_e^*}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad .$$

Wegen  $\omega_0^2 \gg (eB/m_e^*)^2$  gilt im Nenner  $(\omega_0^2 - \omega^2) \gg \omega^2 \left(\frac{eB}{m_e^*}\right)^2$ .

<sup>6</sup>  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  sind die Einheitsvektoren im kartesischen Koordinatensystem.

<sup>7</sup> Dabei sind  $E_+ e^{i(k_{1,r}z - \omega t)} \vec{e}_-$  und  $E_- e^{i(k_{1,r}z - \omega t)} \vec{e}_+$  die sich im Medium ausbreitenden links- bzw. rechtszirkular polarisierten Wellen.

Mit dieser Näherung und der Beziehung  $n_1^2 - n_r^2 = (n_1 + n_r)(n_1 - n_r) \approx 2n(n_1 - n_r)$  ergibt sich gemäß Gl. (5) für den Drehwinkel der Faraday-Rotation:

$$\theta = \frac{\omega}{2c} (n_1 - n_r) L = \frac{\omega^2 N e^3}{2c n m_e^* \epsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} L \cdot B = V \cdot L \cdot B \quad , \quad (10)$$

und somit die Verdet-Konstante zu:

$$V = \frac{\omega^2 N e^3}{2c n m_e^* \epsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad . \quad (11)$$

Der Resonanznenner zeigt die Abhängigkeit der verdetschen Konstante von der Wellenlänge. Größere Drehwinkel werden nur in Resonanznähe erwartet. Man überzeugt sich leicht, dass beide Gln. (8) und (11) für die verdetsche Konstante identisch sind, wenn man aus  $\epsilon = \epsilon(\omega, B = 0)$  (Gl. (9)) und mit  $n^2 = \epsilon$  die Größe

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{dn}{d\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\omega} \frac{d\omega}{d\lambda} = - \frac{2\pi c}{2n\lambda^2} \frac{N e^2}{m_e^* \epsilon_0} \frac{2\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

berechnet und in Gl. (8) einsetzt.

- Man kann bei Kenntnis der Dispersionskurve  $n(\lambda)$  eines Stoffes aus der Messung der verdetschen Konstante  $V$  die effektive Oszillatormasse  $m_e^*$  der Dispersionselektronen bestimmen. Diese Methode wurde in den 1960er Jahren benutzt, um die effektive Masse der Elektronen in Halbleitermaterialien zu bestimmen [2,3]. Die effektive Masse ist ein Maß für die Bandkrümmung.
- Stellt man die Gleichung  $n^2 = \epsilon(\omega, B = 0)$  (Gl. (9)) um, so erhält man die sogenannte Sellmeier-Gleichung:

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{4\pi^2 c^2 m_e^* \epsilon_0}{N e^2} \left( \frac{1}{\lambda_R^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad . \quad (12)$$

Trägt man  $1/(n^2 - 1)$  über  $1/\lambda^2$  auf kann man aus einer Anpassung den Anstieg und die Lage der Modellresonanz ermitteln. Aus dem Anstiegswert und der über die Messung der Verdet-Konstanten ermittelten effektiven Oszillatormasse  $m_e^*$  läßt sich dann die Zahl der Dispersionselektronen pro  $\text{cm}^{-3}$  bestimmen.

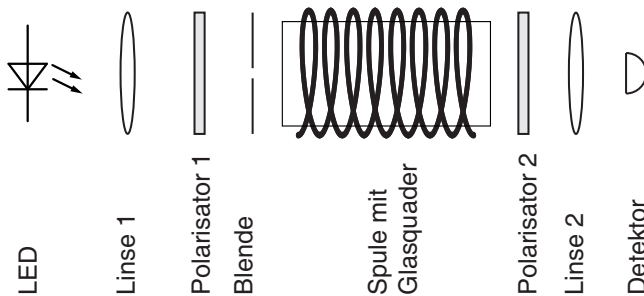
## Versuchsdurchführung

### Aufbau

Im Versuchsaufbau (Abb. 5) wird das Licht einer Leuchtdiode mit einer Sammellinse möglichst gut parallelisiert und mittels eines Polarisationsfilters linear polarisiert. Anschließend wird mit Hilfe einer Irisblende der Strahldurchmesser soweit eingeschränkt, dass das Parallelbündel den Glasblock so durchstrahlen kann, dass keine unerwünschten Reflexionen innerhalb des Glasblockes an den Glasquaderlängsseiten auftreten. Der Glasquader befindet sich in einer Spule, die ein axiales Magnetfeld erzeugt. Hinter der Spule befindet sich ein weiterer Polarisationsfilter, der als Analysator verwendet

wird. Das durch den Analysator transmittierte Licht wird mit Hilfe der Linse auf eine Siliziumphotodiode mit integriertem OPV<sup>8</sup> fokussiert. Die Magnetspule ist an einen Frequenzgenerator mit integriertem Verstärker anzuschließen. Der durch die Spule fließende Strom wird mit einem Multimeter gemessen und das Detektorsignal gleichzeitig mit einem Multimeter im DC-Betrieb und einem Oszilloskop im AC-Betrieb registriert.

Zur Untersuchung der Wellenlängenabhängigkeit der Verdet-Konstante stehen Ihnen als Lichtquellen verschiedenfarbige LEDs (Tabelle 1) zur Verfügung.



<sup>8</sup> Achten Sie darauf, dass ihr Detektor nicht übersteuert. Das maximale Ausgangssignal beträgt 15 V aufgrund der Versorgungsspannungen des OPV von  $\pm 15$  V.

Abbildung 5: Schematischer Versuchsaufbau

### Modulationsverfahren

Das klassische, statische Verfahren, um die Lagen der Polarisierungsebenen des Lichtes ohne und mit eingeschaltetem Magnetfeld mittels gekreuzter Polarisationsfilter über das jeweilige Transmissionsminimum festzustellen, ist zu ungenau, da die erwarteten Winkeländerungen (etwa  $1^\circ$ ) dafür zu klein sind.

Zum Nachweis kleiner Größen wendet man Modulationsverfahren an. Die Intensität für das durch Polarisator und Analysator transmittierte Licht wird durch das Malussche Gesetz

$$I(\varphi) = I_0 \cos^2 \varphi \quad (13)$$

beschrieben (siehe Versuch O7), wobei  $I_0$  die einfallende Intensität und  $\varphi$  der Winkel zwischen Analysator- und Polarisatorstellung sind. Aus der Ableitung dieser Funktion

$$\frac{dI}{d\varphi} = -I_0 (2 \sin \varphi \cos \varphi) = -I_0 \sin 2\varphi$$

wird sofort offensichtlich, dass der größte Betrag des Anstiegs bei  $\varphi = 45^\circ$  vorhanden ist. Stellt man nun das im axialen Magnetfeld zu untersuchende Medium zwischen Polarisator und Analysator, deren Durchlassrichtungen sich um  $\varphi = 45^\circ$  unterscheiden, so wird aus Gl. (13)

$$I(\theta) = I_0 \cos^2(45^\circ \pm \theta) = \frac{1}{2} I_0 (1 \mp 2 \cos \theta \sin \theta) \quad , \quad (14)$$

wobei  $\theta$  der in den Gln. (7, 10) durch magnetfeldinduzierte Doppelbrechung hervorgerufene Drehwinkel der Polarisierungsebene ist. Mit den Näherungen für kleine Winkel  $\cos \theta \approx 1$  und  $\sin \theta = \theta_B$  lässt sich Gl. (14) umschreiben in:<sup>9</sup>

$$I = I_0 \left( \frac{1}{2} \mp \theta_B \right) \quad . \quad (15)$$

spektr. Maximum in nm	Halbwertsbreite in nm
400	12
470	34
508	40
591	14
628	17

Tabelle 1: LEDs

<sup>9</sup> Dabei sei  $\theta_B$  der Drehwinkel im Bogenmaß.

Wird das mit der Spule erzeugte Magnetfeld mit einer Frequenz  $\Omega$  moduliert, so folgt aus Gl. (15)

$$I(t) = I_0 \left( \frac{1}{2} + \theta_B \sin \Omega t \right) = I_{\text{DC}} + I_{\text{AC}} \quad . \quad (16)$$

Man erhält also am Detektor stets ein DC-Signal, das durch den nur  $45^\circ$  betragenden Winkelunterschied zwischen Polarisator und Analysator verursacht wird, und ein aufgeprägtes AC-Signal, das durch Modulation des Magnetfelds bzw. des Drehwinkels  $\theta$  entsteht. Entsprechend Gl. (16) beträgt der Spitze-Spitze-Wert<sup>10</sup> des AC-Signals  $I_{\text{SS}}$  und das DC-Signal  $I_{\text{DC}}$

$$I_{\text{SS}} = 2I_0\theta_B \quad I_{\text{DC}} = \frac{1}{2}I_0 \quad .$$

Der durch magnetfeldinduzierte Doppelbrechung hervorgerufene Drehwinkel ergibt sich damit sofort im Bogenmaß zu

$$\theta_B = \frac{I_{\text{SS}}}{4I_{\text{DC}}} \quad . \quad (17)$$

Dieses Verfahren hat den zusätzlichen Vorteil, dass die unterschiedlichen Lichtintensitäten der verschiedenfarbigen LEDs sowie die im Bereich von 400 nm bis 650 nm etwa um den Faktor Zwei zunehmende Detektorempfindlichkeit beide Signale gleichermaßen beeinflussen, sich somit in Gl. (17) herauskürzen und nicht weiter betrachtet werden müssen.

#### *Kontrastkorrektur und Einstellprozedur für $\varphi = 45^\circ$*

Die Spannungsdoppelbrechung im Glas und die wellenlängenabhängige unterschiedlich stark polarisierende Wirkung der Polarisationsfilter führt dazu, dass die durch gekreuzten Polarisator und Analysator, also die bei  $\varphi = 90^\circ$  transmittierte Lichtintensität nicht mehr exakt Null wird. Bezeichnet man die bei  $\varphi = 0^\circ$  durch Polarisator und Analysator transmittierte Intensität als  $I_{\parallel}$  und die bei  $\varphi = 90^\circ$  transmittierte Intensität als  $I_{\perp}$ , so modifiziert sich Gl. (13) wie folgt:

$$I(\varphi) = (I_{\parallel} - I_{\perp}) \cos^2 \varphi + I_{\perp} \quad . \quad (18)$$

Daraus ergibt sich bei  $\varphi = 45^\circ$  als DC-Wert der Intensität:

$$I_{\text{DC}} = \frac{1}{2} (I_{\parallel} + I_{\perp}) \quad (19)$$

und als Spitze-Spitze-Wert des AC-Signals:

$$I_{\text{SS}} = 2 (I_{\parallel} - I_{\perp}) \theta_B \quad ,$$

sodass sich die Gl. (17) modifiziert zu:

$$\theta_B = \frac{1}{K} \frac{I_{\text{SS}}}{4I_{\text{DC}}} \quad \text{mit} \quad K = \frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\parallel} + I_{\perp}} \quad .$$

Die Größe  $K$  bezeichnet man als Kontrast.

Voraussetzung für eine exakte Messung der Verdet-Konstanten mit dem beschriebenen Modulationsverfahren ist die möglichst genaue Einstellung des Winkels von  $\varphi = 45^\circ$ , da im Gegensatz zum modulierten Signal das DC-Signal dort kein Extremum aufweist. Die Einstellung des Winkels von  $\varphi =$

<sup>10</sup> Wird auch als Peak-to-Peak-Wert oder nach aktueller Normung Spitze-Tal-Wert bezeichnet. Formelzeichen  $I_{\text{pp}}$ ,  $I_{\text{SS}}$  oder (normgerecht)  $\hat{I}$ .



45° über das Suchen des Maximums des modulierten Signals ist zu ungenau (Warum?). Zur genauen Einstellung von  $\varphi = 45^\circ$  nutzt man die Formel (19), indem man bei jeder Wellenlänge  $I_{\parallel}$  und  $I_{\perp}$  misst, daraus  $I_{\text{DC}}(\varphi = 45^\circ)$  berechnet und anhand des nun bekannten Werts den Analysatorwinkel  $\varphi$  exakt auf 45° einstellt.

Empfohlen wird das Detektorsignal gleichzeitig mit einem Multimeter zur Messung des DC-Signals und mit einem Oszilloskop (AC-Betrieb!) zur Messung des AC-Signals zu registrieren. Zur Unterdrückung höherfrequenter Einstrahlungen sollte beim Oszilloskop ein Tiefpassfilter (Grenzfrequenz 1 kHz) gesetzt werden. Die Raumbelichtung mit Leuchtstoffröhren muss abgeschaltet werden, da diese ein 100 Hz-Signal auf dem Detektor erzeugen können.

### Magnetspule

Das Magnetfeld in einer unendlich langen Spule berechnet sich zu  $H = nI/l$ , wobei  $n$  die Windungszahl,  $I$  die Stromstärke und  $l$  die Länge der Spule sind. Bei realen Spulen endlicher Länge fällt die magnetische Flussdichte entlang der Spulenachse von der Spulenmitte zum Rand hin ab.<sup>11</sup> Deshalb ist es notwendig, die Flussdichte innerhalb der Spule entlang der Spulenachse mit einem Teslameter auszumessen und jeweils eine mittlere Flussdichte gemäß

$$\bar{B} = \frac{1}{l} \int_0^l B dl \quad (20)$$

für verschiedene Stromstärken  $I$  zu ermitteln. Das Verfahren ist gerechtfertigt, da die Flussdichte linear in Gl. (7, 10) eingeht. Diese Kalibrierungsmessungen können mit einer Gleichspannungsquelle durchgeführt werden, da der Gleichstrom  $I$  dem später zu messenden Effektivstrom  $I_{\text{eff}}$  entspricht.

Im Versuch wird die Spule (600 Wdg,  $R = 2,5 \Omega$ ,  $L_{\text{ind}} = 9 \text{ mH}$ , zulässiger Maximalstrom 2 A) an einen Sinusgenerator mit integriertem Verstärker angeschlossen, um ein magnetisches Wechselfeld zu erzeugen. Dabei ist stets der durch die Spule fließende Strom  $I_{\text{eff}}$  mit einem Multimeter zu messen.<sup>12</sup> Für die Amplitude des über die Spulenlänge gemittelten magnetischen Wechselfelds gilt:

$$\bar{B}_{\text{Ampl}} = \sqrt{2} \bar{B} \quad (21)$$

Die Modulationsfrequenz  $\Omega$  des Magnetfelds soll zwischen 40 Hz und 90 Hz liegen. In diesem Bereich ist der Wechselstromwiderstand der Spule klein und das Multimeter ermittelt korrekte Effektivwerte. Die Amplitude der magnetischen Flussdichte kann vorzugsweise durch die Amplitude der Ausgangsspannung des Frequenzgenerators oder durch Variation der Modulationsfrequenz verändert werden, da  $I_{\text{eff}} = U / \sqrt{R^2 + (\Omega L_{\text{ind}})^2}$  gilt.

### Aufgaben

#### 1. Vorbereitung zu Hause:

Beschaffen Sie sich von der Website <http://refractiveindex.info/> für die Glassorten BK7 (N-BK7) und SF10 die Werte  $n(\lambda)$ . Tragen Sie

<sup>11</sup> Innerhalb des Spulenkörpers ist die Flussdichte in lateraler Richtung jeweils nahezu homogen.

<sup>12</sup> Der Effektivwert eines Wechselstroms ist  $I_{\text{eff}} = (1/\sqrt{2})I_0$  mit  $I_0$  als Amplitudenwert.

gemäß Gl. (12)  $1/(n^2 - 1)$  über  $1/\lambda^2$  auf und ermitteln Sie aus einer Anpassung den Anstieg und den Achsenschnittpunkt und daraus die Wellenlänge  $\lambda_R$  der Ein-Oszillator-Modellresonanz für beide Glassorten.<sup>13</sup>

Notwendige Kalibrierungen:

2. Messen Sie mit der Axialsonde des Teslameters den Verlauf der magnetischen Flussdichte  $B$  entlang der Spulenchse innerhalb der Spule bei einer fest gewählten Gleichstromstärke (z. B. 0,8 A) und ermitteln Sie dafür die mittlere Flussdichte  $\bar{B}$  gemäß (20).
3. Ermitteln Sie die Kalibrierungskurve  $\bar{B} = f(I)$  im Bereich von  $0 < I < 2$  A.<sup>14</sup>
4. Bauen Sie die Versuchsanordnung zur Messung der Faraday-Rotation in Glas gemäß Abb. 5 auf. Erzeugen Sie einen möglichst perfekten Parallelstrahl und reduzieren Sie dessen Durchmesser soweit, dass innerhalb des Glaskörpers keine Lichtreflexionen an den Glasquaderlängsseiten auftreten können.<sup>15</sup>
5. Überprüfen Sie ohne Glaskörper und ohne Magnetfeld für eine Wellenlänge das Malussche Gesetz (13), indem Sie bei fester Polarisatorstellung die transmittierte Intensität in Abhängigkeit vom Analysatorwinkel (0 bis  $180^\circ$ ) messen. Tragen Sie die Kurve auf, bestimmen Sie den Kontrast  $K = (I_{\parallel} - I_{\perp}) / (I_{\perp} + I_{\parallel})$  und den Polarisationsgrad  $G = I_{\parallel} / I_{\perp}$ .
6. Wiederholen Sie die Messung mit Glaskörper, aber ohne Magnetfeld und bestimmen Sie Kontrast und Polarisationsgrad. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis. Bestimmen Sie den Anstieg  $dI/d\varphi$  bei  $\varphi = 45^\circ$ .
7. Justieren Sie Ihren Versuchsaufbau so, dass Sie mit Glaskörper aber ohne Magnetfeld einen Polarisationsgrad von  $G > 40$  erreichen.
8. Modulieren Sie das Magnetfeld mit einer Frequenz im Bereich  $40 \text{ Hz} \leq \Omega \leq 90 \text{ Hz}$  und weisen Sie bei einer Wellenlänge nach, dass bei  $\varphi = 45^\circ$  das maximale Modulationssignal auftritt. Tragen Sie dazu die Größe  $I_{SS}$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  auf.

Ermittlung der verdetschen Konstanten:

9. Modulieren Sie das Magnetfeld mit einer Frequenz im Bereich  $40 \text{ Hz} \leq \Omega \leq 90 \text{ Hz}$  und messen Sie die Drehwinkel der Polarisationssebene des Lichtes bei fünf verschiedenen Wellenlängen jeweils für vier Magnetfeldstärken.<sup>16,17</sup>
10. Tragen Sie möglichst in einer gemeinsamen grafischen Darstellung für jede Wellenlänge den Drehwinkel  $\theta$  über  $\bar{B}_{\text{Amp}}$  auf und ermitteln Sie aus ihren Anstiegen die verdetsche Konstante  $V(\lambda)$ . Berechnen Sie nach Gl. (8) die effektive Oszillatormasse  $m_e^*$  der Dispersionselektronen. Benutzen Sie dazu die Werte  $dn/d\lambda$  für die Glassorte BK7, die Sie auf der Website <http://refractiveindex.info/> finden.
11. Ermitteln Sie aus dem Anstieg Ihrer Geraden, in der Auftragung  $1/(n^2 - 1)$  über  $1/\lambda^2$ , unter Verwendung Ihres  $m_e^*$ -Wertes die Zahl  $N$  der Dispersionselektronen pro  $\text{cm}^{-3}$  und vergleichen Sie diese mit der Zahl der Atome pro  $\text{cm}^{-3}$ .<sup>18</sup>

<sup>13</sup> Da Sie die Werte  $m_e^*$  und  $N$  nicht kennen, sind Anstieg und Achsenschnittpunkt aus einer Geradenanpassung zu bestimmen. Diesen Anstieg benötigen Sie auch später für Aufgabe 11.

<sup>14</sup> Beachten Sie Gl. (21)

<sup>15</sup> Benutzen Sie die am Versuchsort vorhandenen Baumwollhandschuhe wenn Sie mit dem Glaskörper hantieren.

<sup>16</sup> Vorzugsweise messen Sie gleichzeitig das DC-Signal mit einem Multimeter und das AC-Signal mit dem Oszilloskop im AC-Betrieb (Parallelschaltung beider Messinstrumente, Tiefpassfilter). Vergessen Sie nicht, den Effektivstrom, der durch ihre Magnetspule fließt, zu messen. Die Amplitude des magnetischen Wechselfelds kann durch die Frequenz oder die am Frequenzgenerator einstellbare Amplitude variiert werden.

<sup>17</sup> Beachten Sie Gl. (19) für die exakte Einstellung von  $\varphi = 45^\circ$ .

<sup>18</sup> Der BK7-Glasblock besteht aus  $\text{SiO}_2$  und hat eine Dichte von  $(2,51 \pm 0,03) \text{ g/cm}^3$ .

Der SF10-Glasblock besteht aus 40%  $\text{SiO}_2$  und 60%  $\text{PbO}$  und hat eine Dichte von  $(4,51 \pm 0,02) \text{ g/cm}^3$ .

12. Führen Sie die in den Aufgaben 9 bis 11 vorgegebenen Untersuchungen für die Glassorte SF10 durch.

[1] H. Becquerel, Compt. Rend., Vol.125, 679, 1897.

[2] H. Gobrecht, A. Tausend, I. Bach, Zeitschrift für Physik Vol. 166, 76, 1962.

[3] M. Balkanski, E. Amzallag, phys.stat.sol, Vol. 30, 407, 1968.