

## Wechselspannungsgenerator (E15)

### Ziel des Versuches

Es soll verifiziert werden, dass die zeitliche Änderung eines magnetischen Flusses, hervorgerufen durch die Änderung der vom Fluss durchsetzten Fläche, eine Spannung induziert. Außerdem wird gezeigt, dass die Leistung einer Spannungsquelle vom Verhältnis ihres Innenwiderstands zum Verbraucherwiderstand abhängig ist.

### Theoretischer Hintergrund

Eine Spule der Windungszahl  $N$  und der Querschnittsfläche  $A$  (Flächennormale  $\vec{n}$ , Flächenvektor  $\vec{A} = A\vec{n}$ ) rotiert mit der Frequenz  $\nu$  in einem homogenen und zeitlich konstanten Magnetfeld der Flussdichte  $\vec{B}$ . Dabei ist die Rotationsachse senkrecht zu  $\vec{B}$  ausgerichtet. Nach dem Induktionsgesetz wird an den Enden der Spule die Spannung

$$U_{\text{ind}} = -N\dot{\phi} = -N\vec{B} \frac{d\vec{A}}{dt} = -NBA \frac{d}{dt} \cos \theta \quad (1)$$

induziert. Dabei ist  $\theta$  der Winkel zwischen  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$ . Bei einer Drehung mit konstanter Frequenz  $\nu$  bzw. konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist dieser Winkel eine lineare Funktion der Zeit:

$$\theta = \omega t = 2\pi\nu t \quad . \quad (2)$$

Für die Induktionsspannung erhält man somit:

$$U_{\text{ind}} = -NBA \frac{d}{dt} \cos(\omega t) = NBA\omega \sin(\omega t) \quad . \quad (3)$$

In der rotierenden Spule wird also eine Wechselspannung induziert und das gesamte System kann als Generator verwendet werden.

Die *Ur-* oder *Quellenspannung* (früher auch als elektromotorische Kraft EMK bezeichnet) einer Spannungsquelle ist konstant und als unabhängig von der äußeren Beschaltung definiert. In unserem Fall ist die Ur- oder Quellenspannung identisch mit  $U_{\text{ind}}$ . Dagegen ist die tatsächlich am Verbraucher zur Verfügung stehende Spannung, die sogenannte Klemmenspannung  $U_{\text{K}}$  von der Stromentnahme  $I$  des Verbrauchers abhängig. Bei belasteter Spannungsquelle (Abb. 1b) verringert sich die dem Verbraucherkreis zur Verfügung stehende Spannung  $U_{\text{K}}$  proportional zur Größe des entnommenen Stroms:

$$U_{\text{K}} = U_{\text{ind}} - IR_{\text{i}} \quad .$$

Der Quotient aus dem Spannungsabfall  $U_{\text{ind}} - U_{\text{K}}$  und der Stromstärke  $I$  wird als innerer Widerstand der Spannungsquelle definiert:

$$R_i = \frac{U_{\text{ind}} - U_{\text{K}}}{I} \quad . \quad (4)$$

Die Spannungsquelle ist somit strombegrenzt, so dass ihr im Kurzschlussfall ( $U_{\text{K}} = 0$ ) maximal der Strom  $I_{\text{max}} = \frac{U_{\text{ind}}}{R_i}$  entnommen werden kann. Nur wenn kein Strom entnommen wird (unbelasteter Generator in Abb. 1a), ist  $U_{\text{K}} = U_{\text{ind}}$  (Leerlauf  $I = 0$ ).

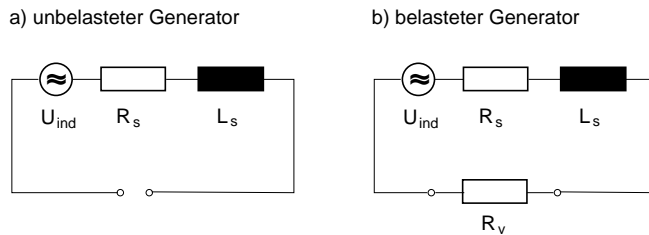


Abbildung 1: Ersatzschaltbild für den unbelasteten und den belasteten Generator.

In Abb. 1 ist der Generator durch ein Ersatzschaltbild dargestellt. Dieses ermöglicht eine einfache Darstellung eines komplizierteren Elementes durch einfache ideale Schaltungselemente. So wird die Generatorspule durch eine Reihenschaltung einer idealen Quelle mit der Spannung  $U_{\text{ind}}$ , eines ohmschen Widerstands  $R_i = R_s$  und einer idealen (d. h. widerstandslosen) Spule mit der Induktivität  $L_s$  ersetzt. Diese Reihenschaltung gibt die elektrische Wirkungsweise der realen Generatorspule wieder. Der Vorteil des Ersatzbildes liegt in seiner elementaren Berechenbarkeit.

Der Verbraucherwiderstand  $R_v$  kann ebenso wie  $U_{\text{ind}}$ ,  $R_s$  und  $L_s$  stellvertretend für eine in der Realität wesentlich kompliziertere Verbraucherschaltung stehen. In dem vorliegenden Versuch wird allerdings tatsächlich nur eine Widerstandsdekade verwendet. Die im Folgenden untersuchten Gesetzmäßigkeiten gelten aber gleichermaßen auch für beliebige andere Verbraucherstromkreise.

Bei Belastung des Generators fällt nur ein Teil der Quellenspannung  $U_{\text{ind}}$  am Verbraucherwiderstand  $R_v$  ab. Der übrige Teil der Spannung fällt am Innenwiderstand der Spule  $R_s$  und, da es sich um eine Wechselspannung handelt, auch an ihrer Induktivität ab. Da die Induktivität sowie die Frequenz der Wechselspannung in diesem Versuch jedoch sehr klein sind, kann  $L_s$  gegenüber den ohmschen Widerständen  $R_s$  und  $R_v$  vernachlässigt werden. In diesem Fall darf mit den Effektivwerten<sup>1</sup> der Ströme und Spannungen gerechnet werden, die im Folgenden der Einfachheit halber mit  $U_{\text{K}}$ ,  $U_{\text{ind}}$  und  $I$  bezeichnet sind. Die Klemmenspannung  $U_{\text{K}}$  ergibt sich damit zu:

$$U_{\text{K}} = R_v I = U_{\text{ind}} - R_s I \quad . \quad (5)$$

Durch Umstellung von Gl. (5) erhält man für die Klemmenspannung  $U_{\text{K}}$  und den Strom  $I$ :

$$U_{\text{K}} = \frac{R_v U_{\text{ind}}}{R_v + R_s} \quad , \quad I = \frac{U_{\text{ind}}}{R_v + R_s} \quad . \quad (6)$$

Der maximale Strom fließt also für  $R_v \rightarrow 0$ , d. h. bei Kurzschluss. Dabei bricht die Spannung  $U_{\text{K}}$  praktisch auf Null zusammen.

<sup>1</sup> Der Effektivwert  $U_{\text{eff}}$  einer sinusförmigen Spannung ist  $U_{\text{eff}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$  wobei  $\hat{U}$  die Amplitude ist.

Im Verbraucherwiderstand  $R_V$  wird die Leistung  $P$  umgesetzt:

$$P = U_K I = R_V I^2 = \frac{U_K^2}{R_V} . \quad (7)$$

Mit Gl. (6) ergibt sich somit für die am Widerstand umgesetzte Leistung:

$$P = \frac{R_V}{(R_V + R_S)^2} U_{\text{ind}}^2 . \quad (8)$$

$P$  ist also nicht nur von der Ur- oder Quellenspannung  $U_{\text{ind}}$  und von  $R_V$  abhängig, sondern auch noch vom Innenwiderstand  $R_i = R_S$  der Quelle. Die maximale Leistung des Generators erhält man aus der Bedingung  $dP/dR_V = 0$ , wobei zusätzlich  $d^2P/dR_V^2 < 0$  gelten muss. Die Bestimmung des Verbraucherwiderstands  $R_V$ , bei dem die maximale Leistung entnommen werden kann, nennt man Leistungsanpassung.

Eine weitere wichtige Größe zur Beurteilung der optimalen Nutzung einer Spannungsquelle ist der Wirkungsgrad  $\eta$ . Er ist definiert als das Verhältnis aus der genutzten Leistung  $P$  zur insgesamt aufgebrauchten Leistung  $P_{\text{ges}}$ :

$$\eta = \frac{P}{P_{\text{ges}}} = \frac{U_K}{U_{\text{ind}}} = \frac{R_V I^2}{U_{\text{ind}} I} = \frac{R_V I}{U_{\text{ind}}} . \quad (9)$$

### *Versuchsaufbau und -durchführung*

Eine auf ihrer Drehachse gelagerte Spule befindet sich in einem homogenen Magnetfeld, das von einem Elektromagneten erzeugt wird. Die Flussdichte  $\vec{B}$  wird mit einer Hall-Sonde gemessen. Die Spule wird von einem Elektromotor in Rotation versetzt. Die Rotationsfrequenz ist im Wesentlichen konstant, wobei kleine Schwankungen technisch unumgänglich sind. Die induzierte Spannung wird mit einem Oszilloskop gemessen. Das Oszilloskop zeigt jeweils den momentanen Spannungs-Zeit-Verlauf an. Aus diesem können der Maximalwert der Spannung  $U_0$  bzw.  $U_{\text{ind},0}$  und die Frequenz (mit Hilfe der Periode auf der Zeitachse) bestimmt werden.

Als Verbraucher steht eine Widerstandsdekade zur Verfügung, mit der der Widerstand in  $10 \Omega$  Schritten im Bereich von  $0$  bis  $9990 \Omega$  variiert werden kann.<sup>2</sup>

Zunächst wird die Amplitude  $U_{\text{ind},0}$  der Urspannung und dann die Amplitude der Klemmenspannung  $U_{K,0}$  bei verschiedenen Widerständen  $R_V$  jeweils als Funktion der Frequenz gemessen. Die Rotationsfrequenz wird über die Versorgungsspannung  $U_M$  des Motors eingestellt.<sup>3</sup> Als Nächstes wird  $U_{K,0}$  bei konstanter Frequenz als Funktion des Widerstands  $R_V$  ermittelt. Bei allen Messungen ist zu beachten, dass sich die Rotationsfrequenz nicht nur mit  $U_M$  sondern auch bei Variation des Verbrauchswiderstands  $R_V$  verändert (warum?). Gegebenenfalls muss  $U_M$  nachgeregelt werden, um die gewünschte Frequenz zu erhalten. Außerdem sollte mit Hilfe des Oszilloskops die Frequenzstabilität überprüft werden.

### *Aufgabenstellung*

1. Berechnen Sie den Widerstand  $R_V$ , für den der Generator die maximale Leistung abgibt und die bei diesem Widerstand abgegebene Leistung.

<sup>2</sup> Beachten Sie bei allen Messungen, bei denen die Widerstandsdekade verwendet wird, dass immer ein endlicher Verbraucher  $R_V \geq 10 \Omega$  vorhanden ist, da bei Kurzschluss die gesamte Spannung am Generator abfällt und die Kohlestifte stark belastet werden.

<sup>3</sup> Dabei sollen Frequenzen bis maximal  $50 \text{ Hz}$  gewählt werden.

Vernachlässigen Sie dabei den induktiven Anteil der Impedanz des Generators ( $\omega^2 L_S^2 \ll R_S^2$ ). Berechnen Sie den dazugehörigen Wirkungsgrad  $\eta$ . Für welche Verhältnisse  $\frac{R_S}{R_V}$  wird der Wirkungsgrad maximal bzw. minimal?

2. Ermitteln Sie den Ohmschen Widerstand  $R_S$  der Generatorspule mit einem Multimeter.
3. Stellen Sie einen festen Strom für die stationäre, magnetfelderzeugende Spule ein und messen Sie die Flussdichte  $\vec{B}$ . Halten Sie  $\vec{B}$  bei der gesamten Versuchsdurchführung konstant. Messen Sie nun die Urspannung  $U_{\text{ind}}$  sowie die Klemmenspannungen  $U_K$  bei  $R_V = 10, 100$  und  $1000 \Omega$  jeweils als Funktion der Frequenz  $\nu$ . Tragen Sie die Datenpunkte dieser vier Messreihen in eine Grafik ( $U$  gegen  $\omega$ ) ein und zeichnen Sie die entsprechenden Ausgleichskurven ein.
4. Berechnen Sie theoretische Werte für die Urspannung  $U_{\text{ind}}$  mit Gl. (3) und zeichnen Sie diese mit in die Grafik ein. Vergleichen Sie experimentelle und theoretische Werte.
5. Messen Sie die Klemmenspannung  $U_K$  bei konstanter Frequenz (z. B.  $\nu = 50 \text{ Hz}$ ) als Funktion des Widerstands  $R_V$ . Dabei wird empfohlen,  $R_V$  von  $10 \Omega$  bis  $130 \Omega$  in  $10 \Omega$ -Schritten zu variieren sowie darüberhinaus für  $R_V [\Omega] = 150, 170, 200, 250, 300, 400, 600$  bzw.  $1000$  zu messen. Tragen Sie die Messpunkte in eine Grafik ein und ermitteln Sie nach Gl. (6) hinreichend viele theoretische Werte für  $U_K$  und zeichnen Sie diese mit ein. Diskutieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf die Gültigkeit von Gl. (6).
6. Berechnen Sie zur Messreihe  $U_K(R_V)$  zu jedem Datenpunkt die entsprechende Verbraucherleistung  $P$  und tragen Sie diese gegen  $R_V$  auf. Liegt das Maximum an der vorhergesagten Stelle? Zeichnen Sie zum Vergleich Funktionen  $y = a/x$  und  $y = b \cdot x$  ein. Durch welche Näherungen kann  $P$  für  $R_V \ll R_S$  und für  $R_V \gg R_S$  beschrieben werden? Bestimmen Sie aus der Kurve außerdem den Wert der maximalen Verbraucherleistung und den Wirkungsgrad an dieser Stelle.