22.03.2019

Serienschwingkreis (E16)

Ziel des Versuches

Die Eigenschaften einer Reihenschaltung von ohmschem Widerstand, Kondensator und Spule werden untersucht. Dabei werden sowohl freie als auch erzwungene Schwingungen betrachtet. Darüber hinaus soll die Bedeutung der Frequenzabhängigkeit der Impedanz im Wechselstromkreis für die Übertragung von Signalen unterschiedlicher Frequenz erkannt werden. Hierzu werden die in diesem Stromkreis auftretenden Resonanzerscheinungen untersucht. Darüber hinaus wird die Aufspaltung bei gekoppelten Resonanzen untersucht.

Theoretischer Hintergrund

Freie gedämpfte Schwingungen

Ein geschlossener Kreis aus Widerstand, Kondensator und Spule bildet einen Schwingkreis. Wird der Kondensator aufgeladen (Abb. 1a, Schalter S in Stellung 1) und anschließend der Schwingkreis geschlossen (Abb. 1a, Schalter S in Stellung 2), so fließt der Entladungsstrom durch die Spule. Aufgrund der Selbstinduktion wird dabei in der Spule eine dem Strom entgegenwirkende Spannung induziert, die das Abfließen der Kondensatorladung verzögert. Nach der kompletten Entladung des Kondensators bewirkt die Selbstinduktion dagegen eine Aufrechterhaltung des Stroms, so dass der Kondensator mit umgekehrter Polung (teilweise) wieder aufgeladen wird. Dies führt zu einer gedämpften Schwingung des Stroms. Bei zu großem Widerstand R und damit verbundener starker Dämpfung kommt es dagegen analog zum pohlschen Rad nicht zu einer Schwingung, sondern es tritt der sog. *Kriechfall* ein. Den Grenzfall zwischen Schwingung und Kriechfall bildet der sog. *aperiodische Grenzfall*.

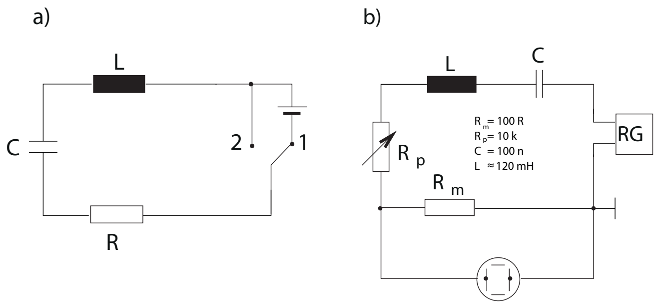

Abbildung 1: Aufbau der Schaltung für freie gedämpfte Schwingungen; a) mit Schalter, b) angeregt durch periodische Rechteckpulse zur Messung mit einem Oszilloskop

Im Folgenden sollen die Gesetzmäßigkeiten bei der freien gedämpften Schwingung anhand des Beispiels in Abb. 1a hergeleitet werden. Nach der kirchhoffschen Maschenregel in Verbindung mit dem ohmschen Gesetz ergibt sich für den geschlossenen Schwingkreis:

$$U_R + U_C + U_L = 0 = R\,I + L\,\dot{I} + \frac{1}{C}\int I\mathrm{d}t \quad . \tag{1}$$

Differentiation nach der Zeit und Division durch L liefert:

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = 0 \quad . \tag{2}$$

Diese Differentialgleichung ist vollständig analog zur Bewegungsgleichung mechanischer Schwingungen mit Rückstell- und Reibungsglied.[1] Die vollständige Lösung lautet:

[1] siehe Versuche M9 bzw. M10

$$I(t) = I_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + I_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \quad , \quad \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad . \tag{3}$$

I_1 und I_2 sind komplexe Integrationskonstanten, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden.

Die Größe der Dämpfung $\frac{R}{2L}$ bestimmt, ob die Wurzel reell oder imaginär wird. Man unterscheidet folgende Fälle:

Schwingfall (unterkritische Dämpfung):	$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$
Kriechfall (überkritische Dämpfung):	$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$
Aperiodischer Grenzfall (kritische Dämpfung):	$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$

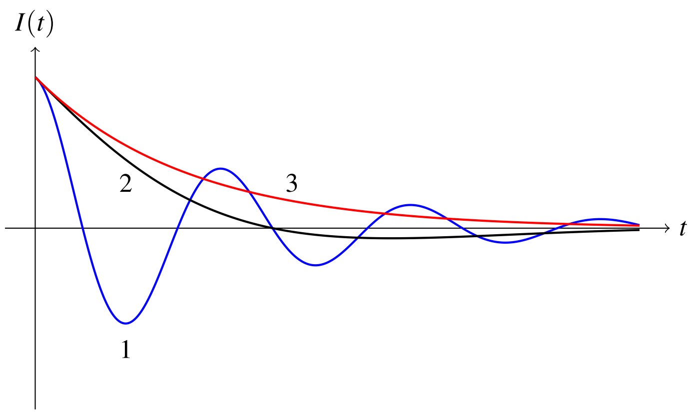

Abbildung 2: Der zeitliche Verlauf des Stroms I
1) bei gedämpfter Schwingung,
2) im Kriechfall mit Nulldurchgang,
3) im Kriechfall ohne Nulldurchgang

Schwingfall: In diesem Fall ist die Wurzel in Gl. (3) imaginär und $I(t)$ stellt eine gedämpfte Schwingung dar:

$$I(t) = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega t - \varphi) \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad . \tag{4}$$

Die Amplitude klingt mit wachsender Zeit exponentiell ab (siehe Kurve 1 in Abb. 2). Die Schwingungsfrequenz für den ungedämpften Fall $R \to 0$ nennt man Eigenfrequenz des Schwingkreises:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad . \tag{5}$$

Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Maxima (oder Minima) $I(t)$ und $I(t+T)$ ist:

$$\frac{I(t)}{I(t+T)} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}}{\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}(t+T)}} = e^{\frac{R}{2L}T} \quad . \tag{6}$$

mit der Periode $T = 1/\nu = 2\pi/\omega$. Der natürliche Logarithmus dieses Verhältnisses heißt logarithmisches Dekrement Λ:

$$\Lambda = \ln\left(\frac{I(t)}{I(t+T)}\right) = \frac{R}{2L\nu} = \frac{\pi R}{\omega L} \quad . \tag{7}$$

In der Technik werden schwingende Systeme durch den sogenannten Gütefaktor Q charakterisiert. Dieser ist definiert als das Verhältnis der im schwingenden System gespeicherten Energie und dem Energieverlust je Periode:

$$Q = \frac{2\pi}{T}\frac{E}{-\dot{E}} \quad . \tag{8}$$

Die Energie des Schwingkreises ist in Form der elektrischen Feldenergie des Kondensators und der magnetischen Feldenergie der Spule gespeichert und pendelt zwischen beiden Energieformen hin und her. Zum Zeitpunkt maximaler Stromstärke befindet sich die Energie vollständig im Magnetfeld der Spule und beträgt $E = LI^2/2$. Die Maximalamplituden des Stroms nehmen zeitlich exponentiell ab ($I_{\max} = I_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}$), so dass man für den Gütefaktor

$$Q = \frac{2\pi}{T}\frac{I_{\max}^2}{-2I_{\max}\dot{I}_{\max}} = \frac{2\pi\nu L}{R} = \frac{\pi}{\Lambda} \tag{9}$$

erhält.

Kriechfall: Bei starker Dämpfung sind $\lambda_{1,2}$ in Gl. (3) reell und negativ. Die Lösung der Differentialgleichung (2) ist also eine Überlagerung zweier abklingender Exponentialfunktionen. Dabei treten keine Schwingungen mehr auf, jedoch kann abhängig von den Anfangsbedingungen noch ein Nulldurchgang stattfinden. Der zeitliche Stromverlauf kann also entweder wie Kurve 2 oder wie Kurve 3 in Abb. 2 aussehen.

Aperiodischer Grenzfall: Bei kritischer Dämpfung tritt eine Entartung der Werte λ_1 und λ_2 auf ($\lambda_1 = \lambda_2 = -R/2L$). In diesem Fall stellt Gl. (3) nur eine Lösung dar. Es muß jedoch noch eine zweite linear unabhängige Lösung existieren. Diese läßt sich z. B. durch den Lösungsansatz der Variation der Konstanten finden. Als allgemeine Lösung ergibt sich:

$$I(t) = (I_0 + I_1 t)\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} \quad . \tag{10}$$

Auch in diesem Fall findet keine Schwingung mehr statt. Wie im Kriechfall kann $I(t)$ je nach Anfangsbedingungen durch Null gehen oder nicht. Eine besondere Bedeutung besitzt der aperiodische Grenzfall insofern, als in diesem Fall die Annäherung an die Ruhelage des schwingenden Systems am schnellsten vor sich geht. Dies wird z. B. in Zeigerinstrumenten ausgenutzt.

Erzwungene Schwingungen

Wird in den Schwingkreis noch eine Spannungsquelle mit zeitlich veränderlicher Spannung $U(t)$ eingebaut (siehe Abb. 3), gilt:

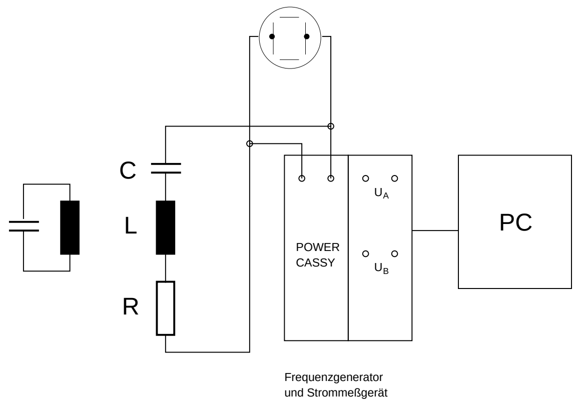

Abbildung 3: Aufbau der Schaltung für erzwungene Schwingungen

$$U_R + U_C + U_L = U(t) \quad . \tag{11}$$

Für einen sinusförmigen Verlauf der Spannung $U(t) = U_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ ergibt sich somit:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \mathrm{i}\omega U_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \quad . \tag{12}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist die Superposition der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (2) mit einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Diese spezielle Lösung erhält man durch Einsetzen des Lösungsansatzes $I(t) = I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ in Gl. (12). Löst man dann nach I_0 auf, so ergibt sich:

$$I_0 = \frac{U_0}{R + \mathrm{i}(\omega L - 1/\omega C)} \quad . \tag{13}$$

I_0 kann durch Betrag und Phase dargestellt werden, d. h. es gilt $I_0 = |I_0| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Damit ergibt sich für die spezielle Lösung von Gl. (12):

$$I(t) = |I_0| \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi)} \quad , \quad |I_0| = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad , \quad \tan\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad . \tag{14}$$

Zu dieser Lösung ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung hinzuzuaddieren. Diese allgemeine Lösung wurde im Abschnitt über freie Schwingungen bereits behandelt. In allen Fällen ergab sich ein mit der Zeit abklingender Stromverlauf. Deshalb stellt die Lösung der homogenen Gleichung nur einen Einschwingvorgang dar. Nach hinreichend langer Zeit ist somit allein Gl. (14) maßgeblich.

Die Amplitude $|I_0|$ ist eine Funktion der Frequenz ω der äußeren Spannung. Sie erreicht ein Maximum für $(\omega L - 1/\omega C) = 0$. Die durch diese Bedingung definierte Frequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ heißt Resonanzfrequenz des Schwingkreises.

Für die Amplituden der Teilspannungen an der Spule und am Kondensator gilt bei Resonanz:

$$\begin{aligned} |U_L(\omega_0)| &= |L\dot{I}| = \omega_0 L \tfrac{U_0}{R} = QU_0 \\ |U_C(\omega_0)| &= |\tfrac{1}{C}\textstyle\int I \mathrm{d}t| = \tfrac{1}{\omega_0 C}\tfrac{U_0}{R} = \omega_0 L \tfrac{U_0}{R} = QU_0 \quad . \end{aligned} \tag{15}$$

Die Identität mit QU_0 ergibt sich durch Vergleich mit den Gln. (7 und 9). Da Q deutlich größer als 1 sein kann, können U_L und U_C die Spannung U_0 weit übersteigen (Spannungsüberhöhung). Die Resonanz im Serienschwingkreis wird deshalb auch Spannungsresonanz genannt. Der Gütefaktor

$$Q = \frac{\pi}{\Lambda} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{16}$$

bestimmt nicht nur die Spannungsüberhöhung bei Resonanz, sondern auch die Form der Resonanzkurven (Abb. 4). Diese werden um so schmaler und steiler, je größer Q wird.

Eine häufig verwendete Größe zur Charakterisierung der Kurvenform von Resonanzkurven, Spektrallinien etc. ist die Halbwertsbreite $\Delta\omega$, welche die Differenz der Frequenzen ω_1, ω_2 angibt, bei denen das Signal gerade halb so groß ist wie bei Resonanz. Im Falle des Schwingkreises bezieht man sich üblicherweise auf die Energie der Schwingung, sodass in Abb. 4 die Halbwertsbreite nicht auf halber Höhe, sondern bei $I = I_0/\sqrt{2}$ eingezeichnet ist. Der Strom ist genau dann auf den Anteil $I_0/\sqrt{2}$ abgesunken, wenn der Ausdruck in der Wurzel in Gl. (14) doppelt so groß ist wie bei Resonanz, also wenn gilt:

$$\begin{aligned}
R &= \left|\omega_{1,2}L - 1/\omega_{1,2}C\right| && \Leftrightarrow \\
R\sqrt{\tfrac{C}{L}} &= \left|\omega_{1,2}\sqrt{LC} - \tfrac{1}{\omega_{1,2}\sqrt{LC}}\right| && \Leftrightarrow \\
\tfrac{1}{Q} &= \left|\tfrac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \tfrac{\omega_0}{\omega_{1,2}}\right| = \tfrac{|\omega_{1,2}-\omega_0||\omega_{1,2}+\omega_0|}{\omega_0\omega_{1,2}}
\end{aligned}$$

Bei ausgeprägter Resonanz (d. h. $\Delta\omega \ll \omega_0$) ist die Resonanzkurve in der Nähe von ω_0 weitgehend symmetrisch, d.h. es gilt: $|\omega_1 - \omega_2| = \Delta\omega \approx 2|\omega_{1,2} - \omega_0|$. Damit folgt:

$$\frac{1}{Q} \approx \frac{(\Delta\omega/2)\cdot 2\omega_0}{\omega_0^2} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \quad . \tag{17}$$

Die relative Breite der Resonanz ist also reziprok zur Güte des Schwingkreises.

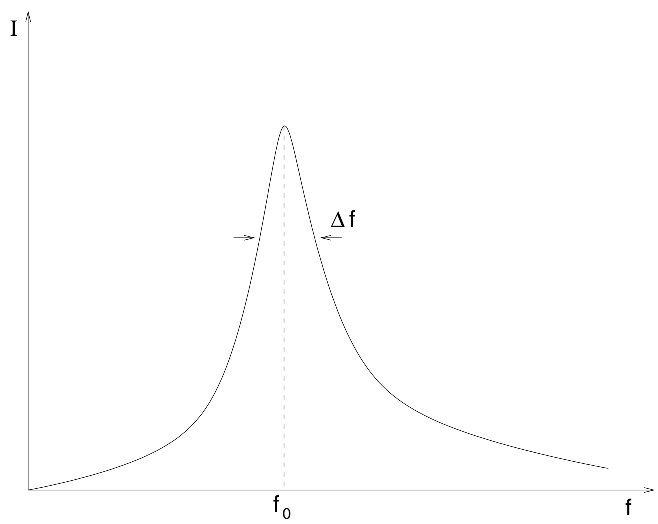

Abbildung 4: Die Amplitude des Stroms als Funktion der Anregungsfrequenz.

Für einen Wechselstromkreis kann man schreiben $U = |U|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ und $I = |I|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t+\varphi}$. Damit ist der komplexe Widerstand (Impedanz) $Z = U/I$ nicht mehr von der Zeit t abhängig:

$$Z = \left|\frac{U}{I}\right| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = |Z|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$$

Die Funktion $Z = Z(\varphi)$ heißt Z-Ortskurve, deren Kehrwert liefert die Ortskurve der Admittanz (Y).

Versuchsaufbau und -durchführung

Für den ersten Versuchsteil muss die Schaltung in Abb. 1b aufgebaut werden. Als Spannungsquelle dient ein Rechteckgenerator (RG), dessen Tastverhältnis direkt am Generator eingestellt werden kann. Das Tastverhältnis ist definiert als die Dauer eines Rechteckpulses T_x im Verhältnis zur Periodendauer T_R der gesamten Rechteckschwingung (siehe Abb. 5).

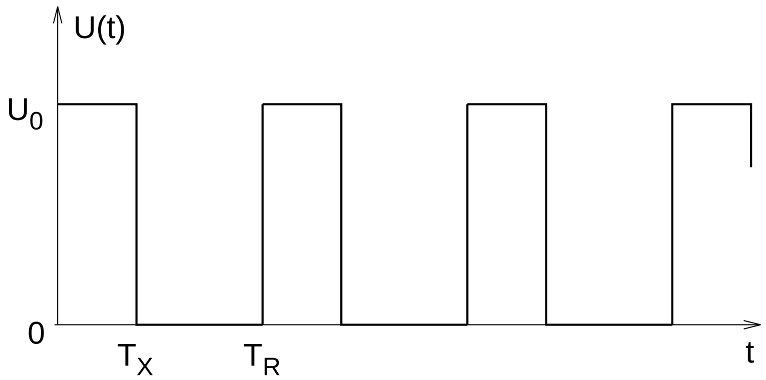

Abbildung 5: Der zeitliche Verlauf der Rechteckspannung.

Das periodische Rechtecksignal ersetzt den Schalter in Abb. 1a. Während des Rechteckpulses wird der Kondensator wie bei Schalterstellung 1 aufgeladen. Nachdem das Rechtecksignal gerade aufgehört hat, kann der Schwingkreis frei schwingen wie in Schalterstellung 2. Bei hinreichend großer Periode T_R setzt der nächste Rechteckpuls erst ein, wenn die Schwingung bereits abgeklungen ist. Der Strom I im Schwingkreis wird über den Spannungsabfall am Widerstand R_m gemessen.[2] Als einstellbarer Widerstand R eignet sich ein Potentiometer mit $10\,\mathrm{k}\Omega$.

[2] R_m sollte dabei möglichst klein sein ($R_\mathrm{m} = 100\,\Omega$). Er legt die kleinstmögliche Dämpfung des Schwingkreises im Experiment fest.

Das Oszilloskop wird mit Hilfe der Rechteckpulse getriggert und misst deshalb in periodischer Folge immer wieder den gleichen Stromverlauf des Schwingkreises. Dabei ist es sinnvoll, auf dem zweiten Kanal des Oszilloskops die Ausgangsspannung des Generators zu messen. T_x sollte möglichst kurz gewählt werden, ohne dass jedoch das Signal vom Schwingkreis zu schwach wird.

Die nachfolgend beschriebenen Messungen werden nun für die Kombination von $C = 0{,}1\,\mu\mathrm{F}$ und $L \simeq 120\,\mathrm{mH}$ für drei verschiedene Dämpfungen (Potentiometereinstellungen oder Festwiderstände) ausgeführt. Als Spule verwenden Sie eine Hälfte (1800 Wdg.) der Doppelspule. Der genaue Wert für die Induktivität ist auf der Spule angeben.

Messen Sie zunächst die Eigenfrequenz ω_0 (bei geringer Dämpfung) mit Hilfe des Oszilloskops. Stellen Sie danach drei unterschiedliche Dämpfungen ein und messen Sie jeweils das logarithmische Dekrement. Bestimmen

Sie dabei jeweils den *gesamten ohmschen Widerstand* R im Schwingkreis mit einem Multimeter. Stellen Sie zuletzt den aperiodischen Grenzfall ein, indem Sie erstens, aus der überkritischen Dämpfung kommend, R schrittweise verkleinern, und zweitens, aus dem Schwingfall kommend, R schrittweise vergrößern. Messen Sie jeweils R und schätzen Sie durch Vergleich beider Werte den Fehler ab. Den aperiodischen Grenzfall erkennt man daran, dass der Schwingkreisstrom I am schnellsten auf Null abfällt. Dabei ist allerdings zu beachten, dass noch ein Nulldurchgang möglich ist.[3]

[3] Kontrollieren Sie am besten gleich nach der Bestimmung von R, ob die Bedingung $(R/2L)^2 = 1/LC$ erfüllt ist.

Im zweiten Versuchsteil wird die Schaltung zur Untersuchung erzwungener Schwingungen aufgebaut. Um die Resonanzkurve aufzunehmen, wird anstelle des Rechteckgenerators ein Sinusgenerator, dessen Frequenz über einen bestimmten Bereich verändert werden kann, in den Stromkreis eingesetzt. Als Sinusgenerator wird hier das PC-gesteuerte „Power-CASSY“-Interface verwendet und entsprechend Abb. 3 angeschlossen. Verwendet wird wieder eine Hälfte der Doppelspule (1800 Wdg., 120 mH) und $C = 0{,}1\,\mu$F. Der Messwiderstand kann entfallen, da das Power-CASSY den Strom intern misst, wenn es als Konstantspannungsquelle betrieben wird.

Die notwendigen Hinweise, um das Power-CASSY als Frequenzgenerator zu betreiben und um die Messung zu automatisieren, finden Sie in der am Versuchsplatz liegenden Kurzanleitung.

Nach erfolgreicher Einstellung können Resonanzkurven für verschiedene Dämpfungen, die Phasenverschiebungen in Abhängigkeit von der Frequenz und die Ortskurven aufgenommen werden. Die vom Funktionsgenerator abgegebene Spannung soll parallel mit dem Oszilloskop beobachtet werden.

Nutzen Sie die noch freien *CASSY-Eingänge* UA *und* UB , um die Spannungüberhöhung an der Spule und am Kondensator in Abhängigkeit von der Frequenz zu messen.

Aufgabenstellung

1. Messen Sie die Eigenfrequenz ω_0 der freien Schwingung für die Kombination von $C = 0{,}1\,\mu$F und $L = 120$ mH. Vergleichen Sie die experimentell bestimmte Eigenfrequenz ω_0 mit der nach Gl. (5) berechneten.

2. Bestimmen Sie das logarithmische Dekrement bei drei verschiedenen Dämpfungen und messen Sie jeweils den zugehörigen Widerstand R. Ermitteln Sie mit Hilfe des Oszilloskops außerdem jeweils die Schwingungsfrequenz (bei großen Dämpfungen ist ω signifikant kleiner als ω_0). Überprüfen Sie die Gültigkeit von Gl. (7). Berechnen Sie den Gütefaktor Q nach Gl. (9) für alle drei Dämpfungen.

3. Messen Sie für den von Ihnen eingestellten aperiodischen Grenzfall den Widerstand R und vergleichen Sie ihn mit dem Wert, der sich aus der Bedingung $(R/2L)^2 = 1/LC$ für den Grenzfall ergibt.

4. Folgende Aufgaben sind für drei Festwiderstände (z. B. $R = 0$, $R = 100\,\Omega$, $R = 200\,\Omega$) zu wiederholen:

   (a) Nehmen Sie die Resonanzkurve für eine feste Dämpfung auf . Bestimmen Sie aus der Kurve die Resonanzposition und die Halbwertsbreite $\Delta\omega$. Vergleichen Sie die Resonanzposition mit ω_0 aus dem ersten Versuchsteil (Einfluss von R_S berücksichtigen!).

(b) Berechnen Sie aus den Halbwertsbreite $\Delta\omega$ den Gütefaktor nach Gl. (17) und vergleichen Sie diesen mit den aus dem ersten Versuchsteil bestimmten.

(c) Messen Sie die Phasenverschiebung φ als Funktion der Frequenz.

(d) Messen Sie Ortskurven der Impedanz und Admittanz und interpretieren Sie diese.

(e) Messen Sie die Spannungen an Spule und Kondensator in Abhängigkeit von der Frequenz. Bestimmen Sie daraus die Spannungsüberhöhung und berechnen Sie den Gütefaktor nach Gl. (15). Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den nach den beiden anderen Methoden ermittelten. Welche Methode zur Bestimmung von Q ist die genaueste?

5. Koppeln Sie einen zweiten Schwingkreis (gleiches C und L) gemäß Abb. 3 über das magnetische Feld der Spule an den ersten an (verwenden Sie dazu die zweite Hälfte der Doppelspule) und nehmen Sie Resonanzkurve, Phasenverlauf und Ortskurven auf. Interpretieren Sie die Ergebnisse.