

Schwingende Saite (M13)

Ziel des Versuches

Ein musikalischer Versuch. Sie lernen die Grundlagen aller Saiteninstrumente kennen und beschäftigen sich experimentell mit dem wichtigen physikalischen Konzept der stehenden Wellen. Dabei wird die Lorentzkraft zum Auslenken der Saite benutzt.

Stehende Wellen spielen nicht nur bei akustischen Resonatoren, sondern auch bei Laserresonatoren, beim Atommodell, in der Quantenmechanik bei der Beschreibung erlaubter Energiezustände, bei Antennen und sogar im Mikrowellenofen eine Rolle.

Im Versuch werden die Harmonischen einer schwingenden Saite in Abhängigkeit von der Spannkraft und der Stärke der anregenden Lorentzkraft untersucht. Sie erhalten außerdem einen Einblick in die Verwendung eines Oszilloskops zur Messwerterfassung.

Vorkenntnisse

- Machen Sie sich vor dem Versuch mit den Basisfunktionen eines Oszilloskops vertraut. Nutzen Sie dafür das angegebene Lernprogramm
- Überlagerung von Sinusschwingungen zu Lissajous Figuren
- Resonanzfall bei erzwungenen Schwingungen und Phasenverschiebung dabei
 - charakteristische Größen einer Welle
 - stehende Wellen
- Lorentzkraft

(Lernprogramm Oszilloskop z. B. auf Oszilloskop)

In Vorbereitung auf den Versuch sollten Sie sich über o. g. Begriffe und Zusammenhänge in Lehrbüchern oder Nachschlagewerken informieren.

Theoretischer Hintergrund

Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) einer transversalen Seilwelle auf einer gespannten Saite gilt:¹

$$v_{\text{Ph}} = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \quad .$$

¹ Wobei F/A die Zugspannung (Zugkraft pro Querschnittsfläche) und ρ die Dichte sind. Eine sehr schöne Herleitung dieser Formel findet sich in [D.C. Giancoli, Physik, 3. Auflage, Verlag Pearson Studium 2006, Seite 529]

Mit $v_{\text{ph}} = \lambda/T = \lambda f$ ergibt sich für die Grundfrequenz:

$$f = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \quad . \quad (1)$$

Nun wäre lediglich zu klären, wie groß λ ist. Betrachtet man z. B. eine nach links in $(-x)$ -Richtung laufende Welle, so wird diese am Einspannpunkt (bei $x = 0$) reflektiert. Die Reflexion muss aber so erfolgen, dass am Einspannpunkt die Auslenkung y zu jedem Zeitpunkt verschwindet. Das ist nur möglich, wenn die am Einspannpunkt (festes Ende) reflektierte Welle einen Phasensprung von π erleidet. Beide Wellen überlagern sich zu:

$$y(x, t) = y_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + y_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} + \pi\right) \quad , \quad (2)$$

wobei y_0 die Amplitude und T die Schwingungsdauer sind. Mittels Additionstheorem kann man (2) umschreiben zu:

$$y(x, t) = 2y_0 \cos \frac{2\pi t}{T} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \quad . \quad (3)$$

Man erhält also das Produkt aus einem reinen Schwingungsterm und einem Term, der eine räumlich periodische Verteilung der Auslenkung beschreibt. Fordert man einen weiteren Knoten bei $x = L$ (L sei die Saitenlänge) mit der Bedingung $y(x = L) = 0$, so folgen aus (3) die Lösungen:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3 \dots \quad (4)$$

Die λ_n sind die Wellenlängen der möglichen resonanten stehenden Wellen auf der eingespannten Saite mit der Länge L . Bei der Grundschwingung entspricht die halbe Wellenlänge der Saitenlänge.

Setzt man (4) in (1) ein so ergeben sich die Frequenzen der Harmonischen (Eigenfrequenzen) zu:

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \quad .$$

In Abb. 1 sind die Schwingungszustände bis zur 4. Harmonischen gezeigt. Die 1. Harmonische ist der Grundton, die 2. Harmonische der 1. Oberton usw. Der reine Grundton (reiner Sinuston) klingt allerdings meist langweilig, den Klang eines Instruments machen erst zusätzlich mitschwingende Obertöne aus. Dabei spielt die Kunst der Musiker, durch Anstreichen oder Zupfen neben dem Grundton bestimmte Obertöne zu erzeugen, eine wichtige Rolle.

Um die Saite im Versuch mit wohldefinierten Frequenzen auszulenken, nutzen wir die Lorentzkraft. Zur Erinnerung an die Schulphysik: Auf eine im Magnetfeld \vec{B} mit der Geschwindigkeit v bewegte Ladung Q wirkt die Lorentzkraft $\vec{F} = Q \vec{v} \times \vec{B}$. Bei einem Leitungsstrom $I = Ne/t$, bei dem sich N Elektronen mit der Ladung $Q = -e$ mit einer mittleren Geschwindigkeit \vec{v} durch den Draht und senkrecht zum Magnetfeld \vec{B} bewegen, ist die Lorentzkraft pro Drahtlänge s :

$$\frac{F}{s} = \frac{NQvB}{s} = \frac{NQB}{t} = IB \quad \text{bzw.} \quad F = IsB \quad . \quad (5)$$

In diesem Experiment ist s dann der Durchmesser des Magneten (Polschuhbreite). Durch die Lorentzkraft wird die Saite senkrecht zum Magnetfeld und

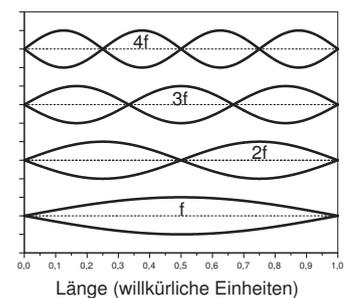


Abbildung 1: Resonante stehende Wellen zu den Zeitpunkten t und $t + T$

senkrecht zur Stromflussrichtung ausgelenkt. Da durch die Saite ein Wechselstrom fließt, erfolgt eine Auslenkung der Saite abwechselnd in beide Richtungen. Die Auslenkung ist im Resonanzfall maximal. Wenn der Magnet in einem Knoten steht, erfolgt keine Auslenkung (Warum?). Bei kleinen anregenden Kräften (kleinen Strömen I) schwingt die Saite nur mit der sie antreibenden Frequenz, während bei größeren Kräften (größere Ströme) zusätzlich Oberschwingungen der antreibenden Frequenz auftreten.

Experimenteller Aufbau und Hinweise zur Versuchsdurchführung

Der experimentelle Aufbau ist in Abb. 2 gezeigt. Das Signal eines Frequenzgenerators wird mit Hilfe eines Tonfrequenzverstärkers verstärkt. Mit dem Ausgangssignal des Verstärkers wird über die Saite eine Glühlampe (12 V/15 W) als Lastwiderstand (Warum?) betrieben. In diesem Stromkreis befindet sich zusätzlich ein Amperemeter, damit der durch die Saite fließende Strom gemessen werden kann. Stromstärken über 1,5 A machen keinen Sinn, da sich die Saite durch die Joulesche Wärme stark erwärmen und ausdehnen würde (Saitenspannung). Die Stromstärke können Sie über die Stärke des Ausgangssignals des Tonfrequenzgenerators regeln.

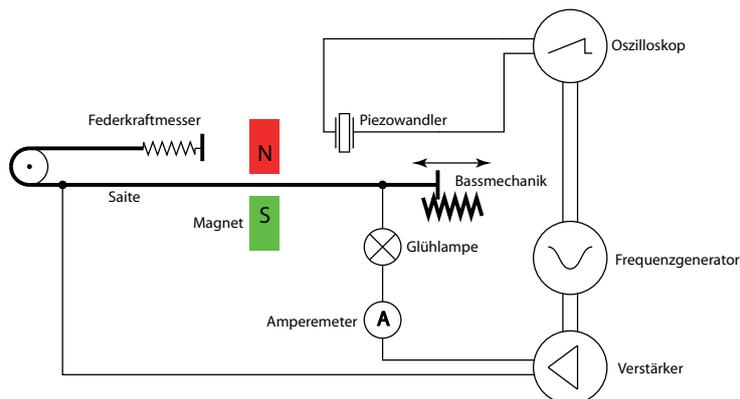


Abbildung 2: Experimenteller Aufbau

Das Signal mit der Erregerfrequenz nehmen Sie direkt am Ausgang des Tonfrequenzgenerators ab und beobachten dieses am Kanal 1 des Oszilloskops. Die Auslenkung der schwingenden Saite messen Sie mit einem Piezowandler, der sich direkt an der Saite befindet und beobachten deren Frequenz am Kanal 2 des Oszilloskops. Am Oszilloskop können Sie zur Beobachtung beider Signale und als Einstellungshilfe für den Resonanzfall zwischen $x - t - /y - t$ -Betrieb und $x - y$ -Betrieb (Lissajous-Figuren) beliebig umschalten. Ein Resonanzfall liegt immer dann vor, wenn die Saite exakt mit der Frequenz einer ihrer Harmonischen angetrieben wird. Zwischen erregender Kraft und eingeschwingener Frequenz der Saite besteht im Resonanzfall bekanntermaßen eine Phasendifferenz von -90° . Damit fließt alle Energie in das System und die Amplitude wird maximal. Die durch den Piezowandler generierte Spannung ist maximal wenn die Geschwindigkeit der Saite am größten ist. Diese Situation entspricht dem Nulldurchgang der Amplitude. Daher ergibt sich bei dieser Art der Messung der Schwingung der Saite im Resonanzfall eine Gesamtphasenverschiebung von 0° bzw. 180° , die z. B.

auch von der Orientierung des Magnetfeldes abhängt. Ebenso ändert sich die beobachtbare Phasenverschiebung um 180° bei Verschieben des Magneten in eine benachbarte Bauchposition.

Die Zugkraft², mit der die Saite gespannt wird, können Sie mit der Bassmechanik einstellen und am Federkraftmesser ablesen. Die Magnetfeldstärke zwischen den beiden Nd-Magneten beträgt ca. 250 mT.

² 25 N dürfen nicht überschritten werden

Aufgabenstellung

1. Machen Sie sich mit der Versuchsanordnung vertraut. Spannen Sie dazu die Saite mit einer Spannkraft von etwa 10 N und lassen Sie einen Strom von etwa 0,3 bis 0,5 A durch die Saite fließen.³ Bringen Sie die Saite mit ihrer 1., 2., 3., 4., 5., und 6. Harmonischen zum Schwingen (Die 1. Harmonische ist die Grundfrequenz!). Beobachten Sie bei der Einstellung der jeweiligen Resonanzen die antreibende Frequenz (Generatorsignal) und die Schwingungsfrequenz der Saite (Piezosignal) mit dem Oszilloskop sowohl im $x-t/y-t$ - als auch im $x-y$ -Betrieb. Messen Sie auch die antreibende Frequenz und die Schwingungsfrequenz der Saite im $x-y$ -Betrieb des Oszilloskops, zum Nachweis der Phasenverschiebung⁴. Notieren Sie die Frequenzwerte der verschiedenen Harmonischen und beschreiben Sie Ihre Beobachtungen am Oszilloskop (Skizze). Stellen Sie grafisch die Frequenzen über den Ordnungszahlen der Harmonischen dar.
2. Vergleichen Sie Ihr in Aufgabe 1 erhaltenes experimentelles Ergebnis mit dem theoretischen gemäß Formel (1) zu erwartenden.⁵ Dazu müssen Sie den Durchmesser der Saite bestimmen.⁶ Vergessen Sie bei der theoretischen Berechnung der Grundfrequenz der Saite und dem Vergleich nicht die Berücksichtigung der maximalen Messunsicherheit aller Größen und die Berechnung der Unsicherheit indirekter Messgrößen!
3. Berechnen Sie die Größe der in Aufgabe 1 verwendeten antreibenden Lorentzkraft gemäß (5).
4. Messen Sie die Abhängigkeit der Grundfrequenz der Saite von der Spannkraft über einen Bereich von 2 bis 24 N. Nehmen Sie die Messreihe bei zunehmender Spannkraft auf. Drehen Sie die Spannschraube immer nur in eine Richtung (Warum?). Führen Sie diese Messungen mit der 3. oder 5. Harmonischen durch, um eine höhere Genauigkeit zu erreichen.
5. Stellen Sie die Ergebnisse von Aufgabe 4 bereits während des Versuches in einer Grafik dar und diskutieren Sie eventuelle Unterschiede zwischen beiden Messreihen.
6. Wählen Sie eine Spannkraft im Bereich von 8 bis 10 N und einen Strom im Bereich zwischen 0,3 und maximal 0,6 A. Stellen Sie den Magneten in die Mitte der Saite und suchen Sie eine Resonanz im Bereich um 1 kHz. Die höheren Resonanzschwingungen der Saite können Sie nicht mehr sehen, aber bereits hören und beim Beobachten mit dem Oszilloskop im $y-t$ oder im $x-y$ -Betrieb erkennen. Messen Sie, durch Verschieben des Magneten entlang der Saite, die Lage von mehreren Knotenpositionen aus und ermitteln Sie daraus, um welche Harmonische es sich handelt.

³ Wechselstrom!

⁴ Die Phasenverschiebung φ kann u. a. aus der maximalen Höhe der Ellipse auf der y -Achse B und dem Schnittpunkt der Ellipse mit der y -Achse b über die Beziehung $\sin \varphi = (b/B)$ bestimmt werden.

⁵ Dichte der Saite $\rho = 8,5 \text{ g/cm}^3$

⁶ Messung mit der Bügelmessschraube an verschiedenen Stellen zwecks Abschätzung der Messunsicherheit

7. Nehmen Sie für drei verschiedene Stromwerte ($I = 0,3; 0,8; 1,2 \text{ A}$) jeweils Frequenzspektren (FFT)⁷ der schwingenden Saite bei der 3. Harmonischen auf und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Danksagung

Für die Idee zu diesem Versuch danken wir Herrn apl. Prof. Dr. Friedrich H. Balck (TU Clausthal) und Frau Klaudia Rückmann (prämierte JuFo-Arbeit 2007, Berlin).

⁷ FFT (Fast-Fourier-Transformation) ist eine Methode, die u. A. in der Signalanalyse der Naturwissenschaften angewendet wird. Sie basiert auf der mathematischen Methode der Fourier-Transformation, die es erlaubt, z. B. aus dem zeitlichen Verhalten eines periodisch veränderlichen Signals die Periode, bzw. Frequenz zu berechnen. FFT ist ein Computeralgorithmus, der zur schnellen Analyse solcher Daten angewendet wird.