

Geometrische Optik (O1)

Ziel des Versuches

Im ersten Versuchsteil werden Brennweiten von dünnen Sammell- und Zerstreuungslinsen mit zwei Verfahren, dem Besselverfahren und der Autokollimation, bestimmt. Im zweiten Versuchsteil wird der Zusammenhang zwischen Brennweite und Linsenkrümmung am Beispiel des optischen Systems des Auges untersucht. Im dritten Versuchsteil werden Brennweite und Hauptebenen eines Linsensystems nach dem abbeschen Verfahren bestimmt.

Teil 1 ist von allen, Teil 2 nur von „Nicht-physikern“ und Teil 3 nur vom Studiengang Physik durchzuführen.

Studierende des Lehramtes Physik führen neben Teil 1 entweder Teil 2 oder Teil 3 durch.

Teil 1: Brennweitenbestimmung an dünnen Linsen

Theoretischer Hintergrund

Abbildungsgleichung

Eine Linse wird als dünn bezeichnet, wenn ihre Dicke klein ist im Vergleich zu den Krümmungsradien ihrer beiden Oberflächen. Eine dünne Linse hat auf beiden Seiten (Gegenstands- und Bildseite) die gleiche Brennweite f . Für eine dünne Linse gilt die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (1)$$

Dabei sind a die Gegenstandsweite und b die Bildweite.

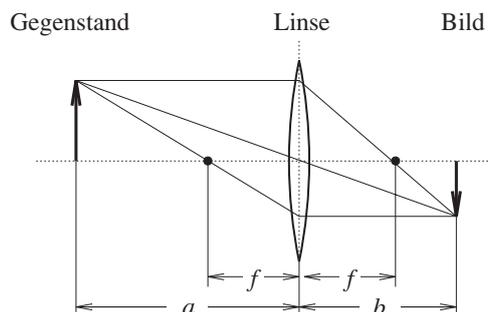


Abbildung 1: Abbildung mit einer dünnen Linse.

Für ein System aus zwei Linsen mit den Brennweiten f_1 und f_2 ergibt sich die gesamte Brennweite f_{ges} zu:

$$\frac{1}{f_{\text{ges}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (2)$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass der Abstand c der Linsen klein gegen f_1 und f_2 ist. Andernfalls ist in Gl. (2) noch ein Korrekturterm zu berücksichtigen und

es gilt:

$$\frac{1}{f_{\text{ges}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{c}{f_1 f_2} \quad (3)$$

Im Prinzip kann f direkt nach Gl. (1) bestimmt werden. Dazu muss jedoch die Lage der Mittelebene der Linse bekannt sein. Um dieses Problem zu umgehen, wendet man das Besselverfahren an. Ein anderes Verfahren zur Bestimmung von f ist die Autokollimation. Zwar ist dieses besonders einfach zu handhaben, jedoch besitzt es auch den oben erwähnten Nachteil, dass die Lage der Mittelebene bekannt sein muss.

Alle im Folgenden beschriebenen Verfahren sind auf Sammellinsen, nicht jedoch auf Zerstreuungslinsen anwendbar. Es ist aber möglich, eine Zerstreuungslinse mit einer Sammellinse derart zu kombinieren, dass das Gesamtsystem wieder wie eine Sammellinse wirkt. Die Brennweite des Gesamtsystems lässt sich z. B. mit dem Besselverfahren bestimmen. Ist die Brennweite der Sammellinse bekannt, so kann mit Gl. (2) bzw. Gl. (3) die Brennweite der Zerstreuungslinse berechnet werden.

Besselverfahren

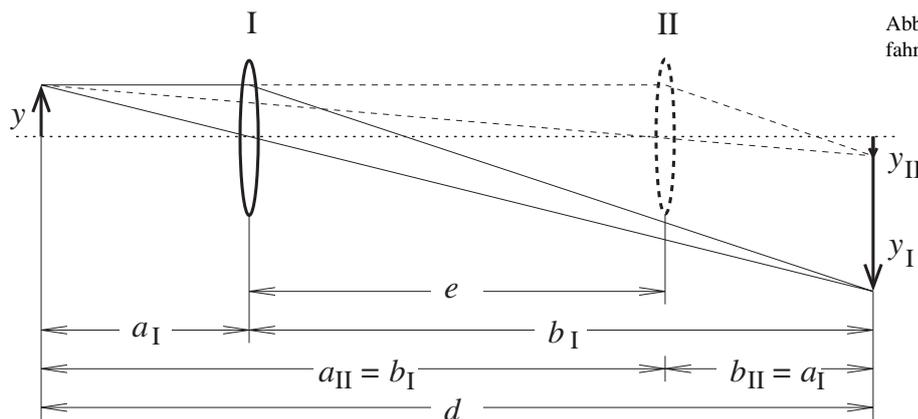


Abbildung 2: Abbildung beim Besselverfahren.

Für einen hinreichend großen Abstand d zwischen Gegenstand und Bild ($d > 4f$) gibt es zwei zueinander spiegelsymmetrische Linsenstellungen I und II, die jeweils ein reelles Bild des Gegenstands liefern (siehe Abb. 2).

Für die geometrischen Größen in Abb. 2 gilt:

$$e = b_I - a_I = a_{II} - b_{II} \quad \text{und} \quad d = a_I + b_I = a_{II} + b_{II} \quad (4)$$

Daraus ergibt sich:

$$d^2 - e^2 = 4a_I b_I = 4a_{II} b_{II} \quad \text{mit}$$

$$f = \frac{a_I b_I}{a_I + b_I} = \frac{a_{II} b_{II}}{a_{II} + b_{II}}$$

und man erhält die Beziehung:

$$f = \frac{d^2 - e^2}{4d} = \frac{1}{4} \left[d - \frac{e^2}{d} \right] \quad (5)$$

oder

$$\frac{e^2}{d} = d - 4f \quad (6)$$

- In Abb. 1 ist die doppelte Brechung des Lichtes an den beiden Linsenoberflächen durch eine einfache Brechung an deren Mittelebene ersetzt worden. Diese Konstruktion ist nur für dünne Linsen zulässig.
- Die Brennweite einer Linse ist von den Krümmungsradien und vom Brechungsindex des Linsenmaterials abhängig. Da der Brechungsindex wiederum von der Wellenlänge abhängt (Dispersion), ist die Brennweite dispersiv (chromatische Aberration).

Autokollimation

Ein Gegenstand kann mit Hilfe einer Linse und einem direkt dahinter befindlichen Spiegel in die Gegenstandsebene selbst abgebildet werden (siehe Abb. 3). Dazu muss der Abstand zwischen dem Gegenstand und der Linsenmittelebene gerade die Brennweite f betragen. Der Abstand zwischen dem Spiegel und der Linse spielt dabei zumindest theoretisch keine Rolle.

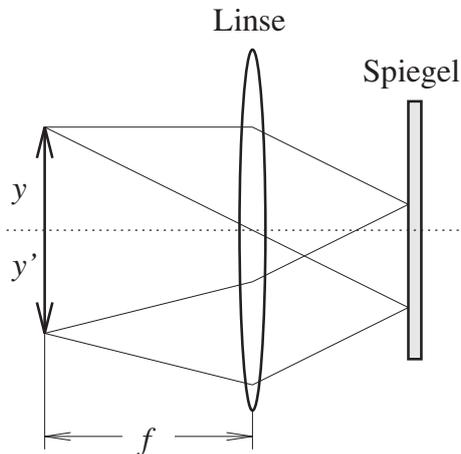


Abbildung 3: Abbildung beim Autokollimations-Verfahren.

Versuchsaufbau und -durchführung

Beim optischen Aufbau sind sämtliche Komponenten in sogenannten Reitern eingespannt, die auf einer optischen Bank verschoben und festgespannt werden können. An den Reitern befinden sich Marken und auf der optischen Bank ein Maßstab, sodass alle Abstände zwischen den Reitern bestimmt werden können.

Bei allen Messungen sollte sich die Objektblende direkt vor der Lampe befinden, um störendes Nebenlicht zu vermeiden.

Besselverfahren

In Abb. 4 ist der Versuchsaufbau für das Besselverfahren dargestellt. Ein leuchtendes Objekt (Gegenstand G) wird durch eine Linse auf einen Schirm abgebildet. Das Bild des Objektes (B) wird jeweils für die zwei verschiedenen Linsenstellungen (siehe Abb. 2) scharfgestellt und die Reiterstellungen abgelesen.

Das Linsensystem aus Zerstreuung- und Sammellinse kann, wenn beide dünne Linsen direkt aufeinander liegen, hier noch als dünne Linse behandelt werden.

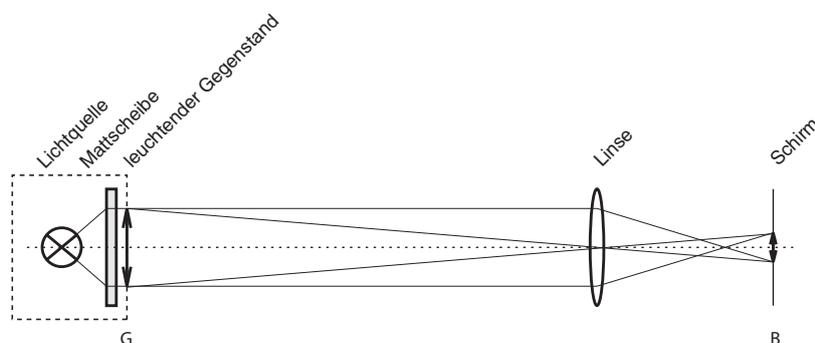


Abbildung 4: Optische Anordnung beim Besselverfahren.

Misst man den Abstand e für verschiedene Abstände d , so ergibt sich bei einer grafischen Auftragung von e^2/d gegen d nach Gl. (6) eine Gerade. Aus

dem Schnittpunkt dieser Geraden mit der e^2/d -Achse lässt sich die Brennweite f bestimmen.

Autokollimation

Der Versuchsaufbau entspricht dem in Abb. 4, nur wird der Schirm durch einen Spiegel ersetzt. Das System Linse/Spiegel muss solange verschoben werden, bis in der Gegenstandsebene ein scharfes Bild entsteht.

Es ist zu beachten, dass die Reitermarkierungen nicht den genauen Ort der Mittelebenen der optischen Elemente angeben. Zwischen beiden kann ein gewisser Abstand bestehen, dessen Vernachlässigung bzw. ungenaue Abschätzung zu einem Fehler in der bestimmten Brennweite führen kann. Um diesen Fehler zu minimieren, sollten zwei Messungen durchgeführt werden, zwischen denen die Linse in der Halterung um 180° gedreht wird. Aus beiden Resultaten wird dann der Mittelwert gebildet.

Aufgabenstellung Teil 1:

1. Schätzen Sie zuerst die Brennweite aller am Platz vorhandenen Sammellinsen ab. Benutzen Sie dazu Licht mit möglichst ebenen Wellenfronten.
2. Bestimmen Sie die Brennweite einer (auch für Aufgabe 3 geeigneten) Sammellinse mit dem Besselverfahren. Das Besselverfahren ist für mindestens fünf verschiedene Abstände d (zwischen Gegenstand und Bild) durchzuführen und die Brennweite über die beschriebene grafische Auswertung (Darstellung e^2/d gegen d) zu ermitteln. Größtfehlerabschätzung und Fehlerkreuze!
3. Bestimmen Sie die Brennweite einer Zerstreuungslinse, indem Sie diese mit einer geeigneten Sammellinse zusammensetzen und mit dem Besselverfahren die Gesamtbrennweite für das Linsensystem ermitteln. Berechnen Sie daraus die Brennweite der Zerstreuungslinse sowohl mit Gl. (2) als auch mit Gl. (3).
4. Überprüfen Sie die gemessenen Brennweiten durch Autokollimation. Bei der Autokollimation sind die Messungen für die oben beschriebenen zwei Linsenstellungen durchzuführen. Größtfehlerabschätzung!

Teil 2: Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Brennweite und Linsenkrümmung am Beispiel des Augenmodells

Theoretischer Hintergrund

Mit der Linsenschleiferformel lässt sich die Brennweite einer dünnen Linse aus der Krümmung ihrer Grenzflächen R_1 , R_2 berechnen. Für den Fall einer bikonvexen Linse (Sammellinse) und unter folgenden Annahmen:

n = Brechungsindex des Linsenmaterials und das die Linse umgebene Medium ist Luft ($n_{\text{Luft}} = 1$) lautet die Formel wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{n - n_{\text{Luft}}}{n_{\text{Luft}}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{mit} \quad |R_1| = |R_2| = R. \\ &= (n - 1) \left(\frac{2}{R} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Das Auge

Das „Objektiv“ des Auges ist zusammengesetzt aus der Cornea (Hornhaut), vorderer Augenkammer und einer Linse mit variabler Brennweite. Es entwirft auf der Netzhaut ein umgekehrtes und stark verkleinertes Bild. Die Sehachse trifft auf den sogenannten gelben Fleck.¹ Die Iris dient als Blende, die bei hellen Lichtquellen die Pupille mit Hilfe des Ciliarmuskels verkleinert und sie im Dunkeln weitet. Die Iris beider Augen sind synchron geschaltet.

Zur Scharfeinstellung von Gegenständen in unterschiedlichen Entfernungen (a von ca. 25 cm bis ∞) wird die Linse des Auges mehr oder weniger (bei nahen Gegenständen stark, bei weit entfernten kaum bis gar nicht) gekrümmt und verändert dadurch ihre Brechkraft. Die Linse des Auges ist an sogenannten Zonulafasern befestigt, die in den Ciliarmuskel münden. Dessen Kontraktion bewirkt die Krümmung (Veränderung der Krümmungsradien r_1 und r_2 einer Bikonvexlinse mit Brechungsindex $n = 1,4$. Im Augennieren ist der Brechungsindex etwa $n = 1,35$). Bei erschlafftem Muskel sorgen die Zonulafasern und der Innendruck des Auges dafür, dass die Linse wieder abflacht.²

Die Brennweite für ferne Objekte ($a = \infty$) beträgt $f_{\text{fern}} = 2,5$ cm (Abstand Cornea - Retina). Die Brennweite f_{nah} für nahe Objekte, die sich im Nahpunkt³ $a = 25$ cm vor dem Auge befinden, ergibt sich zu

$$f_{\text{nah}} = \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right]^{-1} = \left[\frac{1}{25 \text{ cm}} + \frac{1}{2,5 \text{ cm}} \right]^{-1} \approx 2,2 \text{ cm.}$$

Versuchsaufbau und -durchführung

Die im Versuch verwendete variable Linse wird mit Hilfe einer Spritze mit Wasser gefüllt. Im Gegensatz zur echten Augenlinse wird im Versuch durch die Veränderung des Füllvolumens⁴ der Krümmungsradius R der Linse und damit deren Brechkraft verändert. Für symmetrische bikonvexe Linsen in Luft gilt bei achsennahen Strahlen (siehe Gl. 7)

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \frac{2}{R} \quad \text{und} \quad R = \frac{D^2}{8h} + \frac{h}{2} \quad ,$$

¹ Im Zentrum des gelben Fleckes (3-5 mm Durchmesser) befindet sich die Stelle des schärfsten Sehens, die sogenannte Fovea centralis mit einem Durchmesser von 1,5 - 1,7 mm.

² Die Hauptbrechung findet an der Grenzfläche Luft/Hornhaut statt, d. h. unter Wasser ($n_{\text{Wasser}} = 1,3$) ist kaum noch eine gute optische Abbildung möglich.

³ Als Nahpunkt wird die deutliche Sehweite beim normalsichtigen Auge bezeichnet.

⁴ Das für eine sinnvolle Funktion notwendige minimale Füllvolumen beträgt ca. 40 ml und das maximal zulässige 100 ml.

wobei D der Linsendurchmesser und h die Höhe der jeweiligen Kugelabschnitte ist. Das Volumen beider Kugelabschnitte aus der sich die Sammellinse zusammensetzt, kann mit $V = 2\pi h(\frac{3D^2}{4} + h^2)/6$ berechnet werden. Für unseren Fall ist $D = (10,0 \pm 0,2) \text{ cm} > h$ und somit $V \approx \frac{\pi h D^2}{4}$.

Bei bekannten Füllvolumen kann also die Höhe des Kugelabschnitts mit $h \approx \frac{4V}{\pi D^2}$ berechnet werden, und damit der Krümmungsradius der Linse und deren Brennweite.

Zur Simulation der Situation beim Auge wird die Bildweite b fest eingestellt, wobei für das normalsichtige Auge etwa $b = 22 \text{ cm}$ zu wählen ist. Es ist zu beachten, dass – mit der Linsengleichung leicht nachvollziehbar – für das scharfe Abbild eines endlich weit entfernten Gegenstands die Bildweite b etwas größer als die Brennweite f zu wählen ist. Für einen ca. 150 cm entfernten Gegenstand sollte sich dann bei einem Füllvolumen von 50 ml ein scharfes Bild auf dem Schirm befinden.

Bei einem Füllvolumen von ca. 50 ml verhält sich die variable Linse relativ stabil, bei allen anderen Füllvolumina ist während des Versuches die Stellung der Spritze zu kontrollieren und gegebenenfalls nachzuregulieren. Beim erstmaligen Füllen der Linse ist darauf zu achten, dass die Luft aus der Linse entweicht, was durch mehrmaliges vorsichtiges Auf- und Abwärtsbewegen des Spritzenstempels erreicht wird.

Auf Grund von Lichtstreuung am Plastikmaterial der Linse und wegen der durch die nicht einheitliche Krümmung im Randbereich auftretenden Linsenfehler sind für eine gute optische Abbildung vor allem achsennahe Strahlen zu benutzen. Dafür ist eine Irisblende vorgesehen, die sich direkt vor der variablen Linse befinden soll (Abb. 5).

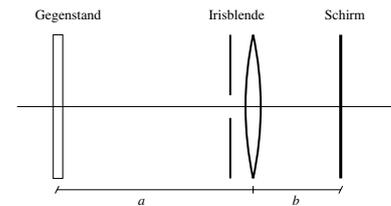


Abbildung 5: Aufbau mit variabler Linse

Aufgabenstellung Teil 2

1. Die Brennweite der variablen Linse ist für verschiedene Füllmengen (50 bis 100 ml in 10 ml Schritten) mit der Autokollimationsmethode zu bestimmen und grafisch darzustellen.
2. Für das normalsichtige Auge sind für verschiedene Gegenstandsweiten (ca. 20 bis 30 cm Schritte) die für ein scharfes Abbild erforderlichen Füllvolumina der Linse bis zum Nahpunkt zu messen und in eine Darstellung Brennweite f über Gegenstandsweite a einzutragen.
3. Berechnen Sie aus den verwendeten Füllmengen der Linse deren Krümmungsradius R und daraus die jeweilige Brennweite. Tragen Sie diese Werte mit den entsprechenden Messunsicherheiten zusätzlich in den Graphen von Aufgabe 1. Vergleichen (Diskutieren) Sie die gemessenen Werte im Vergleich zu den berechneten.

Teil 3: Bestimmung der Hauptebenen eines Linsensystems (nur für Studiengang Physik)

Theoretischer Hintergrund

Bei dicken Linsen oder Linsensystemen ist die Abbildungsgleichung (1) zunächst nicht verwendbar, da die Größen Brennweite f , Gegenstandsweite a und Bildweite b nicht definiert sind. Man kann jedoch nach Gauß die sogenannten Hauptebenen H und H' einführen und mit deren Hilfe die o. g. Größen definieren. Diese Hauptebenen können innerhalb oder außerhalb eines Linsensystems liegen. Ihre Lage hängt vom Abbildungsmaßstab des Linsensystems ab. Mit Hilfe der Hauptebenen wird die mehrfache Brechung des Lichts im Linsensystem durch eine einmalige Brechung an der bildseitigen Hauptebene H' ersetzt. Die Bildkonstruktion erfolgt nach den Gesetzen der geometrischen Optik wie üblich mit Hilfe zweier der drei Hauptstrahlen (Brennpunkt-, Parallel- und Mittelpunktstrahl).

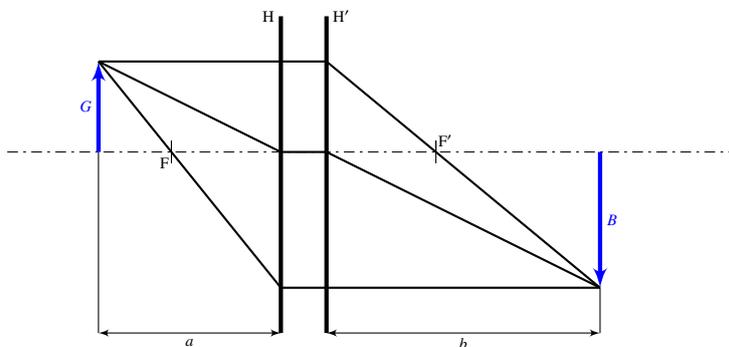


Abbildung 6: Hauptebenen Sammellinse

Die Hilfskonstruktion ist in Abb. 6 dargestellt. Zunächst zeichnet man die vom Gegenstand ausgehenden Hauptstrahlen bis zur gegenstandsseitigen Hauptebene H . Ab hier erfolgt eine horizontale Verschiebung der Schnittpunkte bis zur bildseitigen Hauptebene H' , an der schließlich die Brechung stattfindet. Dabei wird der gegenstandsseitige Parallel- bzw. Brennpunktstrahl zum bildseitigen Brennpunkt- bzw. Parallelstrahl. Bei Zerstreuungslinsen ist entsprechend den Gesetzen der geometrischen Optik die Lage der Hauptebenen H und H' vertauscht (siehe Abb. 7). Die Abbildungsgleichung (1) gilt für das Linsensystem, wenn Gegenstandsweite, Bildweite und Brennweite von der jeweiligen Hauptebene ausgehend definiert werden, wie es in Abb. 6 und 7 dargestellt ist.

Brennweite und Lage der Hauptebenen können experimentell nach dem Verfahren von Abbe bestimmt werden. Da man weder Gegenstandsweite noch Bildweite direkt messen kann, misst man die Abbildungsmaßstäbe für verschiedene Positionen des Gegenstands auf der optischen Achse. Für den Abbildungsmaßstab M gilt:

$M = b/a = B/G$, wobei B die Bildgröße und G die Gegenstandsgröße ist. Die Abbildungsgleichung (1) kann man damit umschreiben zu

$$a = f \left(1 + \frac{1}{M} \right) . \quad (8)$$

Da die Gegenstandsweite a nicht messbar ist, definiert man sich eine be-

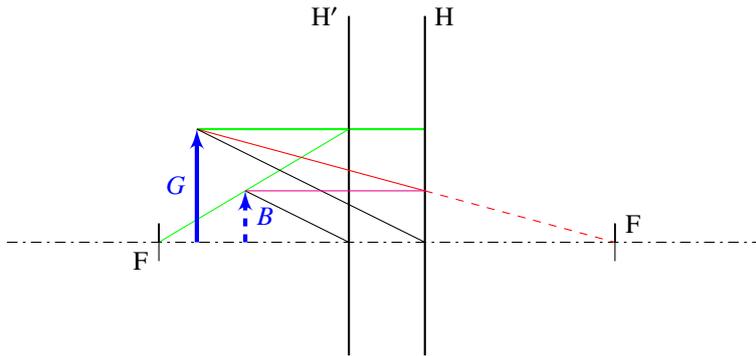


Abbildung 7: Hauptebenen Zerstreungslinse

liebige Markierung am Linsensystem (z. B. eine Reiterkante) und misst für verschiedene Abstandsmaßstäbe den jeweiligen Abstand zwischen dem Gegenstand und dieser Markierung.

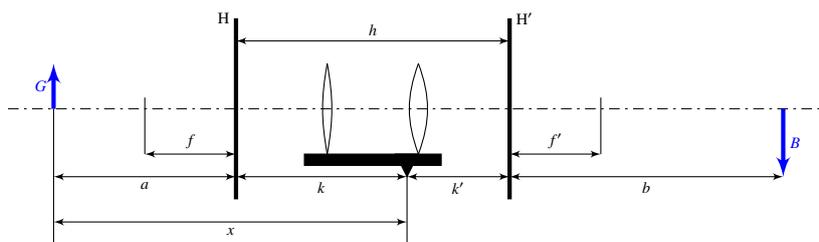


Abbildung 8: Messung der Hauptebenen

Dieser Abstand sei gemäß Abb. 8 $x = a + k$, so dass aus Gl. (8) folgt:

$$x = f \left(1 + \frac{1}{M} \right) + k \quad (9)$$

Die Brennweite f und die Größe k können aus einer Auftragung x über $(1 + 1/M)$ bestimmt werden. Um die Größe k' zu bestimmen, wird das Linsensystem um 180° gedreht und unter Verwendung derselben Markierung die analoge Größe

$$x' = f' \left(1 + \frac{1}{M'} \right) + k' \quad (10)$$

gemessen. Der Abstand beider Hauptebenen beträgt $h = k + k'$.

Beim Besselverfahren gilt für ein Linsensystem nun $d = a + b + h$ (siehe Abb. 4), sodass sich Gl. (5) wie folgt modifiziert:

$$f_{\text{Bessel}} = \frac{(d - h)^2 - e^2}{4(d - h)} \quad (11)$$

Versuchsaufbau und -durchführung

Es sollen die Brennweiten und die Hauptebenen eines Objektivs nach dem abbeschen Verfahren bestimmt und die Ergebnisse mit dem Besselverfahren überprüft werden. Zur Messung des Abstandsmaßstabs verwenden Sie die

Objektblende und ein Blatt Millimeterpapier auf dem Schirm⁵. Der Abbildungsmaßstab (Vergrößerung) sollte dabei im Bereich zwischen 1 und 6 liegen. Der Abbildungsmaßstab ist jeweils für mindestens sechs verschiedene Abstände zu messen. Für die Überprüfung der nach dem abbeschen Verfahren erhaltenen Ergebnisse mit dem Besselverfahren nach Gl. (11) reicht eine Messung aus, d. h., es soll lediglich ein Wertepaar e, d gemessen werden. Im Rahmen ihrer Größtfehlerbereiche sollten die nach beiden Methoden bestimmten Brennweiten des Linsensystems übereinstimmen.

⁵ Bitte nicht die Schirme bemalen!

Aufgabenstellung Teil 3:

1. Für das Linsensystem sind nach dem Abbeschen Verfahren die Brennweite f , der Hauptebenenabstand h und die Lage der Hauptebenen zu bestimmen.
2. Für Aufgabe 1 sind die Auftragungen x über $(1 + 1/M)$ und x' über $(1 + 1/M')$ anzufertigen und daraus die Größen f, k, k' zu ermitteln.
3. Für einen ausgewählten, gemessenen Abbildungsmaßstab ist eine maßstäbliche Zeichnung auf Millimeterpapier anzufertigen, in der die Lagen des Gegenstands, der Hauptebenen und des Bildes sowie die drei Hauptstrahlen dargestellt sind.
4. Die Ergebnisse sind mit der Besselmethode zu überprüfen.