

---

---

# DIE PLATONISCHEN KÖRPER

*Symmetrien und Eindeutigkeit*

---

---

MATHEMATISCHE SAMMLUNG

GEFÖRDERT DURCH



D. ULRICH

UNIVERSITÄT BREMEN

*Fachbereich* Mathematik und Informatik  
*Arbeitsgruppe* AG Angewandte Analysis  
*Leitung* Prof. Dr. J. Rademacher

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung und Definitionen</b>	<b>1</b>
1.1 Platonische Körper, Regularität, Konvexität . . . . .	1
1.2 Dualität . . . . .	2
<b>2 Symmetrien und Eindeutigkeit</b>	<b>4</b>
2.1 Symmetrien der Platonischen Körper . . . . .	4
2.1.1 Algebraische Vorüberlegungen . . . . .	4
2.1.2 Symmetrien des Tetraeders . . . . .	6
2.1.3 Symmetrien des Hexaeders und des Oktaeders . . . . .	7
2.1.4 Symmetrien des Ikosaeders und des Dodekaeders . . . . .	9
2.1.5 Platonische Körper zur Klassifizierung endlicher Untergruppen des $SO(3)$ .	10
2.2 Eindeutigkeit der Platonischen Körper . . . . .	11
2.2.1 Euklids Beweis . . . . .	11
2.2.2 Euler-Charakteristik und Eulers Polyederformel . . . . .	13

# 1 Einleitung und Definitionen

Tetraeder, Hexaeder (Würfel), Oktaeder, Ikosaeder und Dodekaeder (Abbildung 1) bilden die sogenannten PLATONISCHEN KÖRPER; insbesondere für die Mathematik sind sie seit jeher spannende Forschungsobjekte, denn das Verständnis ihrer Struktur basiert mindestens auf drei der wichtigsten mathematischen Teilgebiete: Algebra, Topologie und Geometrie. Aber auch abseits der Mathematik faszinieren und inspirierten die Platonischen Körper Wissenschaft und Kunst. Diese Faszination gründet vor allem auf der augenfälligen Regelmäßigkeit dieser Körper. In der griechischen Antike etwa wurden Symmetrie und Proportionalität als entscheidende Schönheitskriterien für Körper etabliert und die Platonischen Körper daher als Idealkörper betrachtet.

Spätestens seit Platon (ca. 427-347 v. Chr.) beschäftigt sich die Mathematik mit diesen Körpern. In seinem Spätwerk *Timaios* verankerte der griechische Philosoph das Tetraeder, das Oktaeder, das Hexaeder und das Ikosaeder in seine Welttheorie, indem er diese Körper mit den Elementen Feuer, Luft, Erde und Wasser assoziierte. Außerdem gab er erste Konstruktionsanleitungen und Typisierungen dieser Körper, die seitdem - zusammen mit dem Dodekaeder, das später hinzukam - als die Platonischen Körper bekannt sind. Mit Euklid (360-280 v.Chr.) und dessen Eindeutigkeitsbeweis (3.1) begann dann die rigorosere mathematische Auseinandersetzung mit den Platonischen Körpern, die im 18. Jahrhundert ihren Höhepunkt fand, als der Schweizer Mathematiker Leonhard Euler im Jahr 1750 seine Polyederformel publizierte und damit, fast nebenbei, eine der Grundlagen für die heutige algebraische Topologie lieferte (3.2).

Bevor wir jedoch auf diese beiden Meilensteine in der Mathematik der Platonischen Körper zu sprechen kommen, definieren wir die Platonischen Körper und besprechen ihre wesentlichen Eigenschaften. Besonders ausführlich gehen wir dabei auf die angesprochenen Symmetrien ein (2.2). Zunächst geben wir jedoch die grundlegenden Definitionen.

## 1.1 Platonische Körper, Regularität, Konvexität

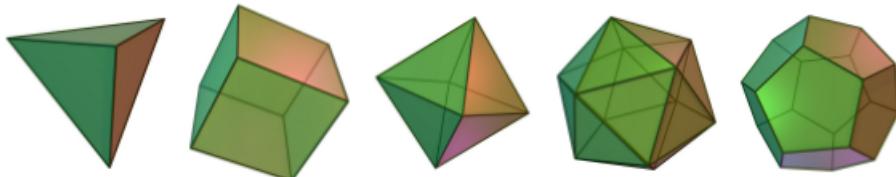


Abbildung 1: v.l.n.r.: Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder (Rösler o.D.)

Die Platonischen Körper sind konvexe, reguläre Polytope im  $\mathbb{R}^3$ .

**Definition 1** (Polytop, Polygon, Polyeder). *Ein Polytop im  $\mathbb{R}^d$  ist eine beschränkte Teilmenge  $P \subset \mathbb{R}^d$ , die der Durchschnitt endlich vieler Halbräume ist und nicht ganz in einer Ebene enthalten ist. Ist  $d = 2$ , heißen die Polytope auch Polygone und für  $d = 3$  Polyeder.*

**Definition 2** (Regularität, Schläfli-Symbol). Ein Polygon heißt regulär, wenn seine Ecken ein regelmäßiges  $n$ -Eck bilden. Ein Polyeder heißt regulär, wenn seine Flächen kongruente regelmäßige  $n$ -Ecke sind und jede Ecke zu genau  $m$  Polygonflächen gehört. Das Symbol  $\{n,m\}$  heißt das Schläfli-Symbol des Polyeders.

**Definition 3** (Konvexität). Ein Polyeder heißt konvex, wenn für je zwei Punkte die Verbindungsstrecke zwischen diesen beiden Punkten ebenfalls vollständig im Polyeder enthalten ist.

Es gibt genau fünf konvexe und reguläre Polyeder (s. Abschnitt 3), nämlich die Platonischen Körper (Abbildung 1):

1. **Tetraeder** (Vierflächner aus vier kongruenten gleichseitigen Dreiecken)
2. **Hexaeder** (Sechsflächner aus sechs Quadraten)
3. **Oktaeder** (Achtflächner aus acht Dreiecken)
4. **Dodekaeder** (Zwölfflächner aus zwölf Fünfecken)
5. **Ikosaeder** (Zwanzigflächner aus zwanzig Dreiecken)

Platon. Körper	# Ecken	# Kanten	# Flächen	Schläfli-Symbol
Tetraeder	4	6	4	$\{3,3\}$
Oktaeder	6	12	8	$\{3,4\}$
Hexaeder	8	12	6	$\{4,3\}$
Ikosaeder	12	30	20	$\{3,5\}$
Dodekaeder	20	30	12	$\{5,3\}$

Tabelle 1: Grunddaten der Platonischen Körper

Wir verzichten darauf, hier einzelne Kenngrößen (Seitenflächeninhalt, Oberfläche, Volumen etc.) der Platonischen Körper aufzulisten oder herzuleiten und verweisen hierfür zum Beispiel auf (Fendt 2005; Jahn 2006). Stattdessen konzentrieren wir uns auf die wichtigsten Eigenschaften der Platonischen Körper, zu denen wir deren Dualität, Symmetrie und Eindeutigkeit zählen.

## 1.2 Dualität

Für ein Polyeder  $P$  bezeichne  $V(P)$  die Menge aller Ecken,  $E(P)$  die Menge aller Kanten und  $F(P)$  die Menge aller Flächen von  $P$ . Im Folgenden betrachte die Flächen, Kanten und Ecken von  $P$  als die Elemente von  $P$ , wobei  $V(P) \subset E(P) \subset F(P)$ . Als Endepunkte der Kanten sind die Ecken in den Kanten enthalten und diese als Ränder der Flächen in den Flächen. Mit dieser Inklusion können wir definieren, was wir unter Isomorphie und Dualität zweier Polyeder verstehen.

**Definition 4.** Zwei Polyeder  $P$  und  $Q$  heißen isomorph (oder kombinatorisch äquivalent oder vom gleichen Typus), wenn es zwischen den Elementen von  $P$  und  $Q$  eine Bijektion gibt, die die Inklusionsrelation zwischen den Elementen erhält.

**Definition 5** (Dualität). Seien  $P$  und  $Q$  Polyeder. Dann heißt  $Q$  zu  $P$  dual, wenn es eine Bijektion zwischen den Elementen von  $P$  und  $Q$  gibt, die die Inklusionsrelation zwischen den Elementen umgekehrt.

Die letzte Definition und insbesondere die Inklusionsumkehr lässt sich gut an den Platonischen Körpern veranschaulichen, denn es gilt die folgende Proposition.

**Proposition 1.** Zu jedem Platonischen Körper gibt es einen dualen Platonischen Körper.

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Konstruktion der dualen Körper. Betrachten wir das Oktaeder und bilden die konvexe Hülle der Mittelpunkte der Seitenflächen, so ergibt sich ein dem Oktaeder eingeschriebenes Hexaeder. Bei dieser Konstruktion hat sich die Inklusion umgekehrt: Die Ecken des Oktaeders sind zu Flächen des Hexaeders geworden. Auf die gleiche Weise lässt sich dem Hexaeder ein Oktaeder einschreiben (Abbildung 2). Dies lässt sich leicht als eine Bijektion zwischen den Elementen des Hexaeders  $H$  und des Oktaeders  $O$  beschreiben, denn  $\#V(H) = \#F(O)$ ,  $\#E(H) = \#E(O)$  und  $\#F(H) = \#E(O)$ . Auf die gleiche Art und Weise sind das Ikosaeder und das Dodekaeder dual. Schließlich ist das Tetraeder selbst-dual (Abbildung 4).  $\square$

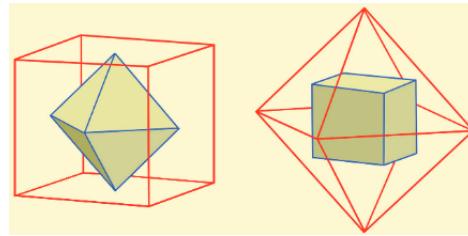


Abbildung 2: Dualität von Hexaeder und Oktaeder (Berger 2016)

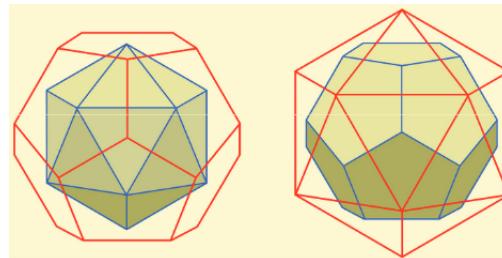


Abbildung 3: Dualität von Ikosaeder und Dodekaeder (Berger 2016)

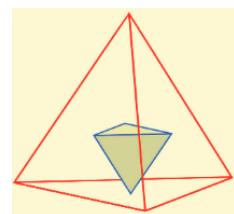


Abbildung 4: Selbst-Dualität des Tetraeders (Berger 2016)

## 2 Symmetrien und Eindeutigkeit

### 2.1 Symmetrien der Platonischen Körper

Die Platonischen Körper zeichnen sich besonders durch ihre schönen Symmetrieeigenschaften aus, d.h. sie besitzen eine erstaunliche Anzahl an Symmetrien und diese lassen sich gut beschreiben. Dafür werden jedoch einige Begriffe der (linearen) Algebra benötigt. Hierfür folgen wir (Rösler o.D.; Henn 2013; Bosch 2001), wobei wir einige Details ausführen und uns auf den für uns relevanten Fall  $\mathbb{R}^3$  beschränken.

#### 2.1.1 Algebraische Vorüberlegungen

Im Folgenden sind stets der euklidische Raum  $\mathbb{R}^3$  mit Skalarprodukt  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$  und Norm  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$  gemeint. Symmetrien einer Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^3$  sind spezielle Bewegungen, die  $M$  auf sich zurückführen. Um dies mathematisch genauer zu fassen, muss zunächst geklärt werden, was unter einer Bewegung zu verstehen ist.

**Definition 6.** Eine BEWEGUNG (isometrische Affinität, Kongruenzabbildung) ist eine längentreue Abbildung  $B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Hierbei bedeutet längentreu  $\|B(x) - B(y)\| = \|x - y\|$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^3$ .

Die Bewegungen bilden eine Gruppe, die sogenannte Bewegungsgruppe  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$  oder Automorphismengruppe  $\text{Aut}(\mathbb{R}^3)$ . Wichtige Bewegungen sind die orthogonalen Abbildungen (Drehungen, Drehspiegelungen) und die Translationen. Im  $\mathbb{R}^3$  wird die Bewegungsgruppe durch Ebenenspiegelungen erzeugt,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^3) = \langle \sigma : \sigma \text{ Ebenenspiegelung} \rangle.$$

**Definition 7.** Eine Abbildung  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt orthogonal, falls sie das Skalarprodukt erhält,

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3.$$

Eine solche Abbildung ist insbesondere bijektiv und längentreu. Die orthogonalen Abbildungen bilden die sogenannte Orthogonalgruppe  $O(3)$ . Da die Determinante einer orthogonalen Abbildung nur  $\pm 1$  sein kann, zerfällt diese Gruppe in zwei Teilmengen:

- $SO(3) = \{f \in O(3) : \det f = +1\}$ , die spezielle orthogonale Gruppe aller orthogonalen Abbildungen mit Determinante 1 (Drehungen)
- $O(3) \setminus SO(3)$ , die Menge aller orthogonalen Abbildungen mit Determinante  $-1$

**Bemerkung 1.**  $SO(3)$  wird auch Drehgruppe genannt, da sie nur aus Drehungen um Achsen besteht. Diese sind orientationserhaltend (Determinante 1). Ihr Komplement  $O(3) \setminus SO(3)$  besteht aus Drehspiegelungen. Diese erhalten die Orientierung nicht (Determinante -1).

**Bemerkung 2.**  $O(3)$  wird manchmal auch Punktgruppe genannt, da orthogonalen Abbildungen stets einen Fixpunkt im Raum haben.  $SO(3)$  wird dann Punktgruppe 1. Art oder eigentliche Punktgruppe bezeichnet, da Drehungen stets tatsächlichen, räumlich durchführbaren Bewegungen entsprechen. Spiegelungen hingegen entsprechen keiner tatsächlich durchführbaren realen Bewegung, daher nennt man sie auch uneigentliche Bewegungen und  $O(3) \setminus SO(3)$  Punktgruppe 2. Art oder uneigentliche Punktgruppe.

Tatsächlich genügt es zur Beschreibung von  $O(3)$ , die Drehungen vollständig zu charakterisieren:

**Proposition 2.**  $SO(3)$  hat Index 2 in  $O(3)$  (und ist somit Normalteiler in  $O(3)$ ). Das heißt, außer  $SO(3)$  existiert nur eine weitere Nebenklasse  $\sigma SO(3)$  in  $O(3)$  und  $O(3)$  zerlegt sich in

$$O(3) = SO(3) \cup \sigma SO(3) \quad (1)$$

für ein beliebig (!) gewähltes  $\sigma \in O(3) \setminus SO(3)$ .

**Beweis.** Seien  $f, g \in O(3) \setminus SO(3)$ . Dann gilt  $\det f = \det g = -1$  und daher, für beliebiges  $s \in SO(3)$ ,  $\det(f^{-1}gs) = 1$ , d.h.  $f^{-1}gs \in SO(3)$ , also  $f^{-1}gSO(3) \subset SO(3)$ . Analog gilt  $g^{-1}fSO(3) \subset SO(3)$ . Daraus folgt  $gSO(3) \subset fSO(3) \subset gSO(3)$  und somit  $fSO(3) = gSO(3)$ . Damit gibt es außer  $SO(3)$  also nur eine Linksnebenklasse (und damit auch nur eine Rechtsnebenklasse) in  $O(3)$ .  $\square$

Schließlich können wir den Begriff Symmetrie für reguläre Polyeder präzisieren.

**Definition 8.** Eine SYMMETRIE eines regulären Polyeders  $P$  ist eine Bewegung  $B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die  $P$  auf sich selbst abbildet,  $B(P) = P$ .

Die Symmetrien bilden eine Untergruppe  $\text{Sym}(P) \subset \mathcal{B}(P)$  der Bewegungsgruppe von  $P$ , die sogenannte Symmetriegruppe. Da die Ecken eines regulären Polyeders im  $\mathbb{R}^3$  auf der Sphäre einer Umkugel liegen, können allenfalls Drehungen und Drehspiegelungen Symmetrien sein, das heißt

$$\text{Sym}(P) \subset O(3). \quad (2)$$

Insbesondere folgt aus Proposition 1, dass  $D(P) := \text{Sym}(P) \cap SO(3)$  Index 2 in  $\text{Sym}(P)$  hat und somit

$$\boxed{\text{Sym}(P) = D(P) \cup \sigma D(P)} \quad (3)$$

für ein beliebiges  $\sigma \in \text{Sym}(P) \setminus D(P) \subset O(3) \setminus SO(3)$ . Insbesondere gilt dann auch

$$\text{Sym}(P) \cong D(P) \times \mathbb{Z}_2. \quad (4)$$

Um die Symmetrien der Platonischen Körper zu beschreiben, genügt es also  $D(P)$  zu bestimmen und ein Element aus  $\text{Sym}(P) \setminus D(P)$  zu finden.

Bevor wir das tun, ist noch anzumerken, dass jede Symmetrie die Ecken von  $P$  permutiert. Dabei lässt nur die identische Abbildung die Ecken fest. Ansonsten induzieren zwei verschiedene Symmetrien verschiedene Permutationen der Ecken.

**Definition 9.** Die symmetrische Gruppe  $S_n$  ist die Gruppe aller Permutationen der Menge  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Sie wird von den 2-Zyklen (Transpositionen) erzeugt. Die alternierende Gruppe  $A_n$  ist die Gruppe aller geraden Permutationen dieser Menge.

Wenn wir also die Ecken von  $P$  mit  $1, \dots, n$  nummerieren, können wir jede Symmetrie des regulären Polyeders mit einem Element aus  $S_n$  identifizieren und  $S(P)$  und  $D(P)$  mit Untergruppen von  $S_n$ . Mit diesen Vorüberlegungen können wir nun die Symmetrien der Platonischen Körper ziemlich genau beschreiben.

### 2.1.2 Symmetrien des Tetraeders

Die Ecken des Tetraeders  $T$  seien mit  $A, B, C, D$  bezeichnet. Die Symmetrien permutieren diese vier Ecken und daher lässt sich die Symmetriegruppe des Tetraeders,  $\text{Sym}(T)$ , mit einer Untergruppe  $U \subset S_4$  identifizieren,  $\text{Sym}(T) \cong U$ . Tatsächlich gilt sogar:

$$\boxed{\text{Sym}(T) \cong S_4} \quad (5)$$

Denn spiegeln wir  $T$  exemplarisch an der Ebene  $CDM$  (Abbildung 1), entspricht dies der Transposition  $\sigma = (AB)$ . Für die insgesamt sechs Eckenpaare gibt es eine solche Spiegelebene (Abbildung 1) und somit umfasst die Symmetriegruppe die Menge  $U'$  aller Transpositionen von  $S_4$ ,  $U' \subset \text{Sym}(T)$ . Diese erzeugen aber  $S_4$ , somit  $\langle U' \rangle = S_4 \subset \text{Sym}(T)$ . Zur Bestimmung der Symmetriegruppe genügt

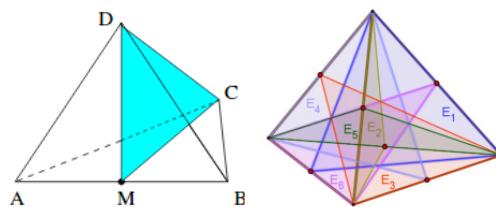


Abbildung 5: Spiegelsymmetrien des Tetraeders (Rösler o.D.; Holzapfel o.D.)

es nach (3), eine der eben beschriebenen sechs Ebenenspiegelsymmetrien, genannt  $\sigma$ , auszuwählen und die Drehungen unter den Symmetrien zu bestimmen. Da  $|S_4| = 24$  und  $|D(T)| = \frac{|\text{Sym}(T)|}{2}$  nach (3), sind 12 Drehungen zu identifizieren. Diese lassen sich folgendermaßen klassifizieren (vgl. Abbildung 2), wobei eine Drehung  $n$ -zählig heißt, wenn eine Drehung um  $\frac{2\pi}{n}$  das Tetraeder auf sich selbst abbildet:

1. Vier 3-zählige Drehachsen  $b_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , durch je eine Ecke und die Mitte der gegenüberliegenden Fläche. Die jeweilige fixe Ecke hat drei Nachbarecken, die mittels zweier 3-er Zyklen,

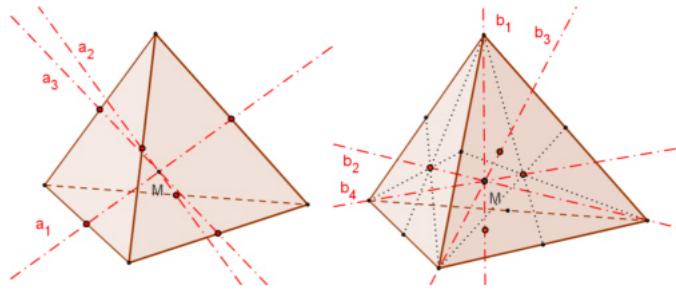


Abbildung 6: Drehsymmetrien des Tetraeders (Holzapfel o.D.)

die den Drehungen um  $\frac{2\pi}{3}$  und  $\frac{4\pi}{3}$  entsprechen, permutiert werden. Beide 3-Zyklen sind gerade Permutationen und legen daher in  $A_4$ . Für die drei anderen Drehachsen dieser Art gilt dies analog, d.h. es ergeben sich  $4 \cdot 2 = 8$  Elemente.

2. Drei 2-zählige Drehachsen  $a_i, 1 \leq i \leq 3$ , durch die Mitten gegenüberliegender Kanten. Pro solcher Achse ergibt sich für die Ecken ein Produkt von zwei Transpositionen, d.h. weitere 3 Elemente in  $A_4$ .

Zusammen mit der Identität sind dies 12 Drehungen und da  $|A_4| = 12$  folgt:

$$D(T) \cong A_4 \quad (6)$$

### 2.1.3 Symmetrien des Hexaeders und des Oktaeders

Da das Hexaeder und das Oktaeder zueinander dual sind, haben sie die gleiche Symmetriegruppe. Es ist daher ausreichend, z.B. die Symmetriegruppe des Hexaeders  $H$  zu bestimmen. Ein offensichtliches Element  $\sigma \in \text{Sym}(H) \setminus D(H)$  ist die Punktspiegelung  $\sigma: x \mapsto -x$  am Mittelpunkt von  $H$ . Nach (3) genügt es  $D(H)$ , also die Drehungen, zu bestimmen. Die Drehungen permutieren nicht nur die acht Ecken des Hexaeders, sondern auch die vier Hauptdiagonalen  $AA', BB', CC', DD'$  (vgl. Abbildung 3). Wir können  $D(H)$  also als eine Untergruppe von  $S_4$  identifizieren. Voraussetzung dafür ist, dass verschiedene Drehungen auch zu verschiedenen Permutationen des  $S_4$  führen bzw. dass die einzige Drehung, welche die Hauptdiagonalen als Menge festlässt (d.h. die Hauptdiagonalen gar nicht permuiert), die Identitätsabbildung ist.

**Proposition 3.** *Die einzige Drehung des Hexaeders, die die Hauptdiagonalen als Menge festlässt, ist die Identität.*

*Beweis.* Sei  $f$  eine solche Drehung. Dann gilt entweder  $f(A) = A$  oder  $f(A) = A'$  (und ebenso für die anderen Eckenpaare). Angenommen  $f(A) = A'$ . Da die Ecken  $B, D$  und  $C'$  durch Kanten mit der Ecke  $B$  verbunden sind, folgt  $f(B) = B', f(D) = D'$  und  $f(C') = C$ . Daraus folgt  $f(A') = A, f(B') = B, f(C) = C'$  und  $f(D') = D$ .

Der Koordinatenursprung liege im Zentrum des Hexaeders. Dann sind  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ . Da  $f$  als orthogonale Abbildung linear ist, ist  $f$  durch diese Basis festgelegt. Aus  $f(\vec{A}) = \vec{A}' = -\vec{A}$ ,  $f(\vec{B}) = \vec{B}' = -\vec{B}$  und  $f(\vec{C}) = \vec{C}' = -\vec{C}$  folgt dann  $f = -\text{id}$ . Da dann  $\det f = -1$  gilt  $f \notin D(W)$ , was einen Widerspruch liefert. Es gilt daher  $f(A) = A$  und die gleiche Argumentation wie zuvor liefert  $f = \text{id}$ .  $\square$

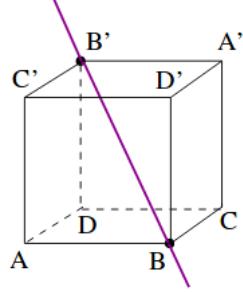


Abbildung 7: Hauptdiagonale  $BB'$  des Hexaeders (Rösler o.D.)

Alle von der Identität verschiedenen Drehungen permutieren also die Hauptdiagonalen und damit kann  $D(H)$  mit einer Untergruppe des  $S_4$  identifiziert werden. Durch Angabe von 23 von der Identität verschiedene Drehungen des Hexaeders kann sogar gezeigt werden:

$$D(H) \cong S_4 \quad (7)$$

Aus (3) und (4) folgt daraus dann insbesondere:

$$\text{Sym}(H) \cong S_4 \times \mathbb{Z}_2 \quad (8)$$

Die 23 Drehungen können wie folgt klassifiziert werden.

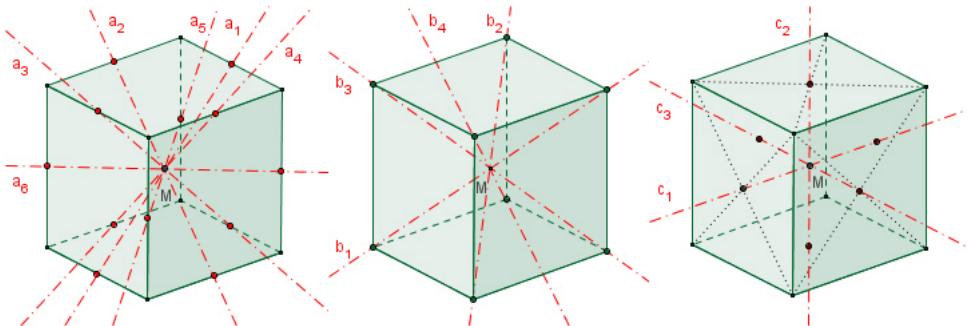


Abbildung 8: Drehachsen des Hexaeders (Holzapfel o.D.)

1. Sechs 2-zählige Drehungen um die Achsen  $a_i, 1 \leq i \leq 6$ , die gegenüberliegende Kantenmitelpunkte verbinden. Das liefert insgesamt  $6 \cdot 1 = 6$  Drehungen.

2. Vier 3-zählige Drehungen um die Hauptdiagonalen  $b_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ . Das liefert  $4 \cdot 2 = 8$  Drehungen.
3. Drei 4-zähligen Drehungen um die Achsen  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , durch gegenüberliegende Flächen. Das ergibt  $3 \cdot 3 = 9$  Drehungen.

#### 2.1.4 Symmetrien des Ikosaeders und des Dodekaeders

Es genügt, die Symmetriegruppe  $\text{Sym}(I)$  des Ikosaeders  $I$  zu bestimmen, da Ikosaeder und Dodekaeder zueinander dual sind. Ein Element  $\sigma \in \text{Sym}(I) \setminus D(I)$  ist wieder gegeben durch die Punktsymmetrie zum Zentrum von  $I$ , d.h. durch die Abbildung  $x \mapsto -x$  und es bleibt  $D(I)$  zu bestimmen. Wie beim Hexaeder gibt es Drehungen um die Hauptdiagonalen und diese sind für das Ikosaeder 5-zählig. Jede Ecke  $V$  von  $I$  lässt sich durch Drehung um eine geeignete Hauptdiagonale in seine fünf Nachbarecken überführen. Die Bahn von  $V$  ist also die gesamte Eckenmenge  $X$  und diese besteht aus 12 Ecken. Damit besteht die Bahn  $D(I) \cdot V$  aus ganz  $X$  und  $|D(I) \cdot V| = 12$ . Der Stabilisator  $S_V$  besteht aus Drehungen um die 5-zählige Hauptdiagonale durch  $V$ , enthält also mit der identischen Abbildung 5 Elemente. Mit der Bahnformel (Rösler o.D.; Bosch 2001) folgt

$$|D(I)| = |D(I) \cdot V| \cdot |S_V| = 12 \cdot 5 = 60. \quad (9)$$

Auch die alternierende Gruppe  $A_5$  hat die Kardinalität 60. Die Vermutung liegt also nahe, dass es

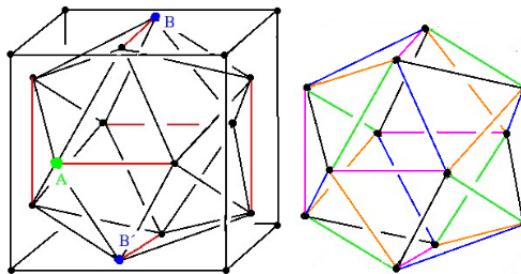


Abbildung 9: In Hexaeder eingebettete Ikosaeder (Rösler o.D.)

eine 5-elementige Menge gibt, die durch  $D(I)$  permutiert wird und dass die Elemente von  $D(I)$  mit geraden Permutationen identifiziert werden können. Tatsächlich gibt es fünf verschiedene Hexaeder, in die  $I$  derart eingebettet werden kann, dass je eine Kante von  $I$  auf einer Seitenfläche eines Hexaeders liegt. Die verschiedenen Farben in Abbildung 5 (rechts) stehen für je eine solche Einbettung in ein Hexaeder und auf der linken Seite von Abbildung 5 ist eine solche Einbettung exemplarisch dargestellt. Jede Drehung in  $D(I)$  permutiert diese 5 Hexaeder und damit die 5 Farben.

Um  $D(I)$  mit einer Untergruppe des  $S_5$  zu identifizieren, ist zu zeigen, dass nur die Identität die Färbung des rechten Ikosaeders in Abbildung 5 unverändert lässt.

**Proposition 4.** *Die Identität ist die einzige Drehung in  $D(I)$ , die das Farbschema des in Abbildung 5 (rechts) abgebildeten Ikosaeders  $I$  unverändert lässt.*

*Beweis.* Sei  $f$  eine Drehung von  $I$ , die die Färbung unverändert lässt.  $I$  ist aufgeteilt in Dreiecke und wir wählen beliebig das Dreieck  $D$  aus, das vorne unten liegt und eine grüne, rosa und schwarze Seite hat. Die Ecken von  $D$  nennen wir  $V_i, 1 \leq i \leq 3$ .  $f$  muss  $D$  auf ein Dreieck der gleichen Farbkombination abbilden und das einzige derartige Dreieck liegt  $D$  diametral gegenüber. Es gilt bzgl. des Zentrums von  $I$  entweder  $f(V_i) = V_i, 1 \leq i \leq 3$ , oder  $f(V_i) = -V_i, 1 \leq i \leq 3$ . Betrachten wir die Ecken  $V_i$  vom Zentrum von  $I$  als Vektoren, so bilden Sie eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  und da  $f$  als orthogonale Abbildung insbesondere linear ist, ist  $f$  durch die Werte auf der Basis bereits festgelegt. Folglich gilt  $f = \text{id}$  oder  $f = -\text{id}$ . Letzteres kann aber nicht der Fall sein, da  $f$  dann Determinante  $-1$  hätte und nicht in  $D(I)$  läge.  $\square$

Somit wissen wir vorerst, dass  $D(I) \cong U$  für eine Untergruppe  $U$  von  $S_5$ . Um  $D(I) \cong A_5$  zu zeigen, müssen wir 60 gerade Permutationen der Farben angeben; diese setzen sich wie folgt zusammen:

1. Sechs 5-zählige Drehachsen (die Hauptdiagonalen), die durch 5-Zykel darstellbar sind. Dies gibt somit  $6 \cdot 4 = 24$  Elemente, die 24 geraden Permutationen in  $A_5$  entsprechen.
2. Zehn 3-zählige Drehachsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Dreiecksflächen. Diese können durch 3-Zykel ausgedrückt werden und das liefert 20 gerade Permutationen.
3. Fünfzehn 2-zählige Drehachsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten. Diese Drehungen lassen die Farbe der gegenüberliegenden Kanten fest und vertauschen je zwei der restlichen vier Farben, d.h. sind als Produkte zweier Transpositionen schreibbar und somit in  $A_5$ . Dies liefert 15 weitere Elemente.

Zusammen mit der identischen Abbildung ergeben sich 60 gerade Permutationen der Farben, d.h.

$$D(I) \cong A_5 \quad (10)$$

und daher insbesondere:

$$\text{Sym}(I) \cong A_5 \times \mathbb{Z}_2 \quad (11)$$

### 2.1.5 Platonische Körper zur Klassifizierung endlicher Untergruppen des $SO(3)$

Abschließend für diesen Abschnitt erwähnen wir noch eine Klassifizierung der endlichen Untergruppen des  $SO(3)$  (Satz 1), die nochmals die algebraische Bedeutung der Platonischen Körper unterstreicht. Dazu ist eine kurze Vorbemerkung nötig; für weitere Details sei jedoch auf (Fischer 2008; Rösler o.D.; Bosch 2001) verwiesen.

**Bemerkung 3.** Sei  $P_n$  ein  $n$ -Polygon in  $\mathbb{R}^2$  mit Mittelpunkt im Zentrum.  $d \in SO(2)$  sei die Drehung von  $P_n$  um  $\frac{2\pi}{n}$  um das Zentrum und  $C_n := \langle d \rangle$  die durch  $d$  erzeugte zyklische Gruppe der Ordnung  $n$ . Schließlich seien  $s \in O(2) \setminus SO(2)$  die Spiegelung von  $P_n$  entlang der  $x$ -Achse und  $D_{2n} := \langle d, s \rangle$

die von  $d$  und  $z$  erzeugte Gruppe der Ordnung  $2n$ , die Diedergruppe. Dann gilt

$$D(P_n) := \text{Sym}(P_n) \cap SO(2) \cong C_n, \quad (12)$$

$$\text{Sym}(P_n) := \{f \in O(2) : f(P_n) = P_n\} \cong D_{2n}. \quad (13)$$

$P_n \subset \mathbb{R}^2$  kann auch als Teil des  $\mathbb{R}^3$  aufgefasst werden und die Spiegelung  $s \in O(2)$  entlang der  $x$ -Achse im  $\mathbb{R}^2$  kann im  $\mathbb{R}^3$  als Drehung  $s' \in SO(3)$  um die  $x$ -Achse interpretiert werden.

Mittels dieser beiden Gruppen sowie der Platonischen Körper Tetraeder (T), Oktaeder (O), Hexaeder (H), Ikosaeder (I) und Dodekaeder (Do) klassifiziert werden können die endlichen Untergruppen des  $SO(3)$  folgendermaßen klassifiziert werden.

**Satz 1.** Jede endliche Untergruppe des  $SO(3)$  ist zu genau einer der folgenden Gruppen isomorph:

1.  $C_n, n \geq 1$
2.  $D_{2n}, n \geq 2$
3.  $A_4 \cong D(T)$
4.  $S_4 \cong D(H) = D(O)$
5.  $A_5 \cong D(I) = D(Do)$

Ein Beweis findet sich zum Beispiel in (Devisscher 2011).

## 2.2 Eindeutigkeit der Platonischen Körper

### 2.2.1 Euklids Beweis

**Prop. XIII.18.a.** No other figure, besides the said five figures, can be constructed which is contained by equilateral and equiangular figures equal to each other.

---

Euklids *Elemente* (Artmann 2012)

Der erste Eindeutigkeitsbeweis für die Platonischen Körper und damit deren erste vollständige Klassifizierung findet sich bereits bei Euklid (3. Jh. v. Chr.). Die folgenden einfachen Beobachtungen sind für diesen Beweis elementar: An jeder Ecke  $V$  eines regulären Polyeders  $P$

1. müssen mindestens drei reguläre kongruente Flächen  $F$  zusammenlaufen und
2. muss die Summe  $\Sigma(V)$  der Innenwinkel  $\alpha$  der angrenzenden Flächen  $< 360^\circ$  sein. Ist nämlich  $\Sigma(V) \geq 360^\circ$ , liegen die Flächen entweder in einer Ebene oder es sind gar keine Ecken möglich. In beiden Fällen können keine geschlossenen Polyeder entstehen.

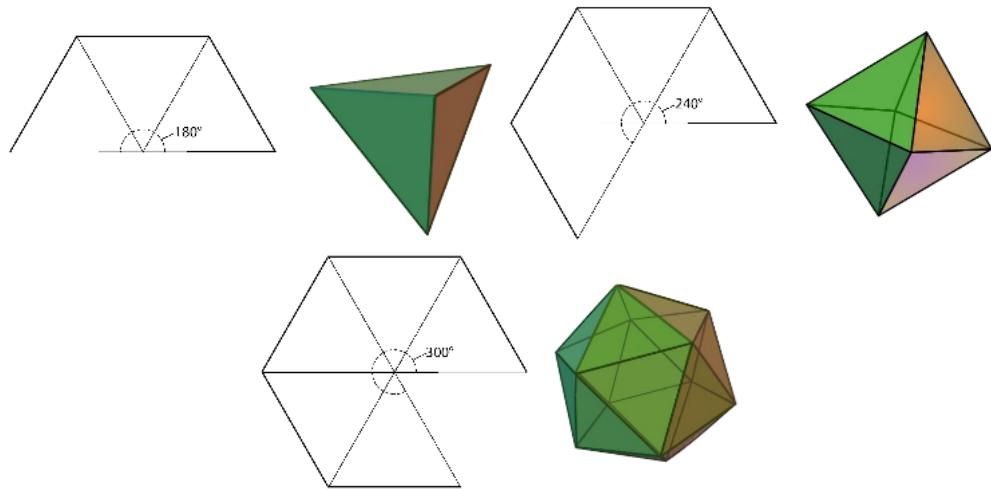


Abbildung 10:  $\Sigma(V) \in \{180^\circ, 240^\circ, 300^\circ\}$ : Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder (Boes 2016)

Startet man mit einem gleichseitigen Dreieck und fügt an jede der Kanten ein weiteres an, ergibt dies  $\Sigma(V) = 180^\circ$ . Man kann hieraus bis auf Spiegelung an der Ebene des Ausgangsdreiecks durch Zusammenführen der benachbarten Kantenpaare und durch Hinzufügen einer zum Ausgangsdreieck kongruenten Fläche nur genau ein konkaves Polyeder bilden, nämlich das Tetraeder. Analog erhält man das Oktaeder und das Ikosaeder, wenn man von einem Netz aus vier bzw. fünf gleichseitigen Dreiecken ausgeht (Abbildung 10). Für sechs gleichseitige Dreiecke gilt bereits  $\Sigma(V) = 360^\circ$ .

Wählt man das Quadrat ( $\alpha = 90^\circ$ ) als Ausgangsfläche, erhält man vier zu diesem Quadrat vertikale Quadrate und  $\Sigma(V) = 270^\circ$  (Abbildung 11). Auch dieses Netz kann nur auf genau eine Weise durch eine zur Ausgangsfläche kongruente Fläche zu einem Polyeder abgeschlossen werden. Dies liefert das Hexaeder. Bei vier Quadraten ist bereits  $\Sigma(V) = 360^\circ$ .

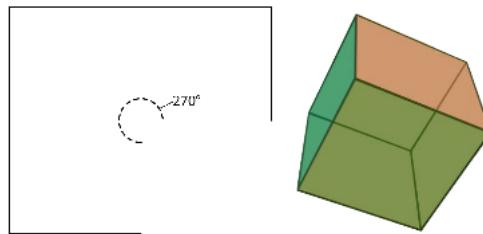


Abbildung 11:  $\Sigma(V) = 270^\circ$ : das Hexaeder (Boes 2016)

Schließlich können wir noch das reguläre Fünfeck ( $\alpha = 108^\circ$ ) als Ausgangsfläche wählen und an jeder der Ecken drei solcher Fünfecke aufeinander treffen lassen. Für jede Ecke ergibt sich dann  $\Sigma(V) = 324^\circ$  und wir erhalten durch Falten an den Kanten eine Schale aus sechs regulären Fünfecken. Dieser können wir auf genau eine Weise eine identische zweite Schale aufsetzen und erhalten das Dodekaeder (Abbildung 12).

Damit ist gezeigt, dass es *höchstens* fünf Platonische Körper geben kann. Um zu zeigen, dass es *genau* fünf Platonische Körper gibt, bleibt streng genommen noch zu zeigen, dass die beschriebenen

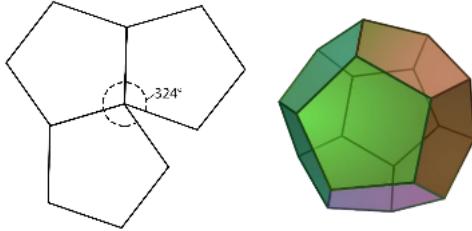


Abbildung 12:  $\Sigma(V) = 324^\circ$ : das Dodekaeder (Boes 2016)

fünf Körper auch wirklich geometrisch konstruiert werden können. Dies tut Euklid, indem er für sie explizite Konstruktionsanleitungen gibt. So finden sich etwa in Buch XIII, 16 und XIII, 17 Anleitungen zur Konstruktion des Ikosaeders und des Dodekaeders. Eine modernisierte und motivierende Formulierung dieser Anleitungen findet sich zum Beispiel in (Artmann 2012).

Insgesamt hat Euklid dadurch mit großem Aufwand gezeigt, dass es genau fünf Platonische Körper gibt. Da er für seinen Beweis jedoch seine gesamten geometrischen Vorüberlegungen in den *Elementen* voraussetzt, ist er aus heutiger Sicht umständlich und unbefriedigend. Viele Mathematiker verstehen weite Teile der *Elemente* gar als reine Vorarbeiten, die effektiv dazu dienten um den beschriebenen Eindeutigkeitsbeweis in Buch XIII schließlich überhaupt führen zu können (Richeson 2008). Aus heutiger Perspektive gibt es einen weitaus eleganteren und nicht weniger weitreichenden Zugang zur Eindeutigkeit der Platonischen Körper, der im nächsten Abschnitt präsentiert werden soll.

### 2.2.2 Euler-Charakteristik und Eulers Polyederformel

In diesem Abschnitt wollen wir uns der Eindeutigkeit der Platonischen Körper auf dem Weg der (algebraischen) Topologie nähern. Dies ist insbesondere darum interessant, weil die Platonischen Körper gewissermaßen ein (oder sogar *der*?) Ursprung der algebraischen Topologie sind; durch seine Beschäftigung mit den Platonischen Körpern entdeckte der Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) eine fundamentale topologische Invariante zur Klassifizierung von 2-Mannigfaltigkeiten (Flächen): Sei  $X$  eine topologische Fläche, etwa ein Polyeder oder die 2-Sphäre

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Unter einer TRIANGULIERUNG von  $X$  versteht man, vereinfacht gesagt, eine lückenlose Überdeckung von  $X$  durch Simplizes (z.B. Dreiecke, Tetraeder) so, dass zwei Simplizes entweder disjunkt sind oder genau eine gemeinsame Kanten haben. Mit  $V,E,F$  seien die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen der Triangulierung bezeichnet. Die EULER-CHARAKTERISTIK von  $X$  ist dann definiert als

$$\chi(X) := V - E + F$$

und es kann gezeigt werden, dass sie unabhängig von der Wahl der Triangulierung ist. Für die 2-Sphäre etwa gilt für jede Triangulierung  $\chi(S^2) = 2$ . Wie anfangs erwähnt ist die Euler-Charakteristik

eine wichtige topologische Invariante, mit deren Hilfe Flächen klassifiziert werden: Zwei kompakte Flächen sind genau dann zueinander homöomorph, wenn sie die gleiche Euler-Charakteristik haben. Da jedes konvexe Polyeder  $P$  homöomorph zu  $S^2$  ist, gilt also  $\chi(P) = 2$ . Für Details sei auf (Mayer 2013; Richeson 2008) verwiesen. Die vorherige Identität, die der Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) erstmals 1750 entdeckte, ist auch unabhängig von ihrer weitreichenden Bedeutung u.a. in der algebraischen Topologie schlicht als Euler'sche Polyederformel (Satz 1) berühmt. Die ehemalige DDR widmete Euler und seiner Polyederformel im Jahr 1983 sogar eigens eine Gedenkbriefmarke (Abbildung 4).



Abbildung 13: Gedenkbriefmarke der DDR zu Ehren Eulers (Boergens 2004)

**Satz 2.** Für ein konkaves Polyeder  $P$  mit  $V$  Ecken,  $E$  Kanten und  $F$  Flächen gilt  $\chi(P) = 2$ .

*Beweisidee.* Eulers Beweisidee besteht im Wesentlichen darin, die Anzahl  $V$  der Polyederecken derart schrittweise zu reduzieren, dass schließlich ein Tetraeder verbleibt (vgl. Abbildung 5). Aus der sich hieraus insgesamt ergebenden Bilanz für die Größen  $E, V$  und  $F$  (vgl. Tabelle 1) sowie der bekannten Eigenschaften des Tetraeders leitet Euler schließlich die Identität  $\chi(P) = 2$  her.  $\square$

Die erneute Konvexität der in jedem Zerlegungsschritt entstehenden Polyeder ist für Eulers Vorgehen wesentlich. Dies kann auch stets durch eine geschickte Wahl der Zerlegung erreicht werden. Ein willkürliches schrittweises Entfernen der Ecken hingegen kann zu nicht-konvexen Polyedern führen; im Allgemeinen muss die Polyederformel dann nicht gelten (Richeson 2008). Da Euler keine Anweisungen für das korrekte Entfernen der Ecken gibt, wird der Euler'sche Beweis heute nur noch selten angeführt und als unzureichend rigoros betrachtet. Modernere und rigorosere Beweise, wie sie etwa Legendre und Cauchy gegeben haben, werden heute stattdessen bevorzugt. Legendre verwendet für seinen Beweis geodätische Hilfsmittel, während Cauchy die Polyederformel auf planare Graphen zurückführt. Für diese beiden Beweise sei auf (Richeson 2008) verwiesen. Daneben gibt es aber noch eine Vielzahl anderer Beweise (Eppstein 2017).

Neben vielen anderen Anwendungen, kann die Euler'sche Polyederformel dafür verwendet werden, um die folgende Eindeutigkeitsaussage über die Platonischen Körper zu beweisen. Dabei ist die Eindeutigkeit bis auf Ähnlichkeit zu verstehen.

**Satz 3.** Die Platonischen Körper sind die einzigen regulären, konvexen Polyeder.

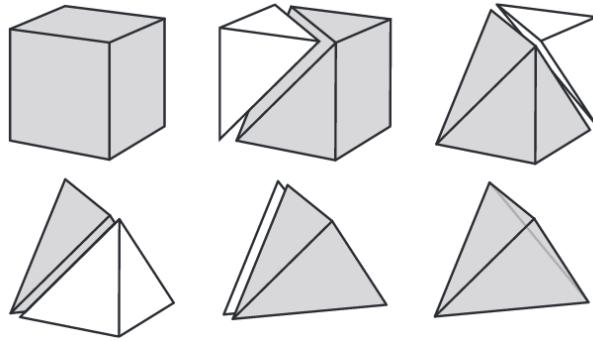


Abbildung 14: Zerlegung eines Hexaeders in ein Tetraeder (Richeson 2008)

Polyeder	Ecken	Kanten	Flächen	Kanten - Flächen
Würfel	8	12	6	6
	7	12	7	5
	6	11	7	4
	5	9	6	3
	4	6	4	2
Tetraeder				

Tabelle 2: Bilanz für die Würfelzerlegung in Abbildung 5

*Beweis.* Sei  $P$  ein konvexes, reguläres Polyeder vom Schläfli-Typ  $\{n,c\}$  mit  $V$  Ecken,  $E$  Kanten und  $F$  Flächen. Da  $P$  regulär ist, sind diese Anzahlen für alle Flächen und Ecken identisch. Da die Flächen reguläre Polygone sind und ein reguläres Polygon mindestens drei Kanten hat, gilt

$$n \geq 3. \quad (14)$$

Da an einer Ecke eines Polyeders mindestens drei Seiten zusammenlaufen müssen, gilt weiterhin

$$c \geq 3. \quad (15)$$

Für die Anzahl der Kanten,  $E$ , machen wir folgende Beobachtungen:

1. Pro Fläche gibt es  $n$  Kanten und jede Kante gehört zu zwei Flächen.
2. An jeder Ecke stoßen  $c$  Kanten zusammen, wobei jede Kante zu zwei Ecken gehört.

Das bedeutet

$$Fn = 2E, \quad Vc = 2E. \quad (16)$$

Umstellen nach  $F, V$  und Einsetzen in die Polyederformel liefert

$$\frac{2E}{c} - E + \frac{2E}{n} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{c} + \frac{1}{n} = \frac{1}{E} + \frac{1}{2}. \quad (17)$$

Angenommen,  $c \geq 4$  und  $n \geq 4$ . Da  $\frac{1}{E} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ , ergibt das einen Widerspruch zur vorherigen Identität, somit  $c \leq 3$  oder  $n \leq 3$ . Wegen (14) und (15) gilt sogar  $c = 3$  oder  $n = 3$ . Sei  $c = 3$ . Dann

ist

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{E} \quad (18)$$

und da  $E > 0$ , folgt  $c \in \{3,4,5\}$ , i.e.  $(n,E) \in \{(3,6),(4,12),(5,30)\}$  und

$$(V,E,F) \in \{(4,6,4),(8,12,6),(20,30,12)\} \quad (19)$$

Nun sei  $n = 3$ . Analog ergibt sich

$$(V,E,F) \in \{(4,6,4),(6,12,8),(12,30,20)\} \quad (20)$$

Als mögliche konvexe, reguläre Polyeder ergeben sich somit das Tetraeder (4,6,4), das Hexaeder (8,12,6), das Oktaeder (6,12,8), das Dodekaeder (20,30,12) und das Isokaeder (12,30,20), vgl. Tabelle 1.  $\square$

## **Abbildungsverzeichnis**

1	v.l.n.r.: Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder (Rösler o.D.) . . . . .	1
2	Dualität von Hexaeder und Oktaeder (Berger 2016) . . . . .	3
3	Dualität von Ikosaeder und Dodekaeder (Berger 2016) . . . . .	3
4	Selbst-Dualität des Tetraeders (Berger 2016) . . . . .	3
5	Spiegelsymmetrien des Tetraeders (Rösler o.D.; Holzapfel o.D.) . . . . .	6
6	Drehsymmetrien des Tetraeders (Holzapfel o.D.) . . . . .	7
7	Hauptdiagonale $BB'$ des Hexaeders (Rösler o.D.) . . . . .	8
8	Drehachsen des Hexaeders (Holzapfel o.D.) . . . . .	8
9	In Hexaeder eingebettete Ikosaeder (Rösler o.D.) . . . . .	9
10	$\Sigma(V) \in \{180^\circ, 240^\circ, 300^\circ\}$ : Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder (Boes 2016) . . . . .	12
11	$\Sigma(V) = 270^\circ$ : das Hexaeder (Boes 2016) . . . . .	12
12	$\Sigma(V) = 324^\circ$ : das Dodekaeder (Boes 2016) . . . . .	13
13	Gedenkbriefmarke der DDR zu Ehren Eulers (Boergens 2004) . . . . .	14
14	Zerlegung eines Hexaeders in ein Tetraeder (Richeson 2008) . . . . .	15

## **Tabellenverzeichnis**

1	Grunddaten der Platonischen Körper . . . . .	2
2	Bilanz für die Würfelzerlegung in Abbildung 5 . . . . .	15

## Literatur

- Artmann, Benno (2012). *Euclid—the creation of mathematics*. Springer Science & Business Media.
- Berger, Peter (2016). *Aspekte der Körpergeometrie*. <http://www.prof-dr-berger.de/pdf/BergerKoerpergeometrie.pdf>. Accessed: 2017-07-26.
- Boergens, Manfred (2004). *Mathematik auf Briefmarken*. [https://homepages-fb.thm.de/boergens/marken/briefmarke\\_00\\_11.htm](https://homepages-fb.thm.de/boergens/marken/briefmarke_00_11.htm). Accessed: 2017-07-21.
- Boes, Linus (2016). *Polyeder und Platonische Körper*. <http://docplayer.org/28938632-Polyeder-und-platonische-koerper.html>. Accessed: 2017-07-21.
- Bosch, Siegfried (2001). *Algebra, 4. überarbeitete Auflage*.
- Devisscher, Maud (2011). *Classification of finite rotation groups*. [http://www.staff.city.ac.uk/maud.devisscher.1/GS/classif\\_rotation.pdf](http://www.staff.city.ac.uk/maud.devisscher.1/GS/classif_rotation.pdf). Accessed: 2017-07-23.
- Eppstein, David (2017). *Twenty Proofs of Euler's Formula*. <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/>. Accessed: 2017-07-21.
- Fendt, Walter (2005). *Die platonischen Körper*. <http://www.walter-fendt.de/m14d/platon.htm>. Accessed: 2017-07-26.
- Fischer, Gerd (2008). „Lehrbuch der Algebra“. In: Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden.
- Henn, Hans-Wolfgang (2013). *Elementare Geometrie und Algebra: Basiswissen für Studium und Mathematikunterricht*. Springer-Verlag.
- Holzapfel, Michael. *Die Symmetrien der regulären Polyeder*. [http://www.michael-holzapfel.de/themen/geom\\_koerper/platon\\_koerper/platon\\_koerper.htm](http://www.michael-holzapfel.de/themen/geom_koerper/platon_koerper/platon_koerper.htm). Accessed: 2017-07-23.
- Jahn, Annamaria (2006). *Platonische Körper*. <http://www.math.kit.edu/iag2/lehre/pro-lehr2006w/media/platon-hand.pdf>. Accessed: 2017-07-26.
- Mayer, Karl Heinz (2013). *Algebraische Topologie*. Springer-Verlag.
- Richeson, David Scott (2008). *Euler's gem: the polyhedron formula and the birth of topology*. Bd. 6. Springer.
- Rösler, Margit. *Die Symmetrien der regulären Polyeder*. <http://www2.math.tu-clausthal.de/Personen/Roesler/polyedervortrag.pdf>. Accessed: 2017-07-22.