J. Gamst

01.09.14

Vorlesung im WS 2014 / 15

Galois-Gruppen: Körpererweiterungen und Cohomologie

V: Montag 10-12 und Donnerstag 14-16 in MZH 6340
Ü: Mittwoch 12-14 in MZH 6340

Eine endliche Körpererweiterung K/k heißt Galoiserweiterung, wenn sie normal und separabel ist. Man hat dann die Galois-Gruppe

$$Gal(K/L) = Aut_k(K),$$

und diese Gruppe spiegelt die Struktur des Verbandes der Zwischenkörper $L/k \quad K$ wider: durch $K \to Fix(U)$ und $L = Gal(K/L)$ erhält man sich gegenseitig umkehrende Zuordnungen $\{Untergruppe\ U \subset Gal\ (K/L)\} \cong \{Zwischenkörper\ L/k \subset K\}$.

Diese Aussage wird traditionell Hauptsatz der Galoistheorie genannt.
Damit lassen sich einige klassische Probleme auf gruppentheoretische Aussagen reduzieren und so lösen:

- Konstruktion des regelmäßigen n-Ecks mit Zirkel und Lineal
- Lösung von Polynomgleichungen durch Radikale

Diesen Kernbestand der Theorie werde ich im ersten Teil des Kurses behandeln.

Danach gehe ich auf eine weitreichende Verallgemeinerung galoistheoretischer Ideen ein, Stichwort: Galoisabstieg.

Dabei geht es für Galoiserweiterungen K/k um folgendes: Es werden Objekte (etwa endlichdimensionale Algebren) betrachtet, die über k oder über K definiert sein können. Durch Konstantenerweiterung $A \to K \otimes A$ geht man von Objekten A/k über zu Objekten über K, die eine Galoisaktion besitzen, und umgekehrt liefern Objekte B/K mit einer Galoisaktion durch A=Fixelemente von Gal (K/k) in B Objekte über k.

Auch diese Prozesse sollten sich gegenseitig umkehren, und man kann dann die Objekte A/k, welche über K zu einem Standardobjekt B_0 (im Fall der Algebren: B_0=Matrixalgebra $M_K(K)$) isomorph werden, klassifizieren: sie sind gegeben durch die Elemente der sogenannten ersten Cohomologiegruppe

$$H^1(Gal\ (K/k), Aut_k(B_0)).$$

Dieses Resultat und Beispiele dazu werde ich im zweiten Teil des Kurses behandeln.

Vorkenntnisse: Algebra I
Es kann eine Studienleistung erbracht werden, auf Wunsch gibt es eine Modulprüfung.
Im Rahmen des Kurses besteht auch die Möglichkeit, Seminarvorträge zu halten.

Näheres bei J. Gamst.
MZH 7170; gamst@math.uni-bremen.de