Technologie-Zentrum Informatik

Technical Report 49

World-State Propagation

Ein Kalkül zur Verknüpfung von Intervallen zwischen Weltzuständen

Jan Ole Berndt

TZI-Bericht Nr. 49
2008

Universität Bremen

TZI-Berichte

Herausgeber:
Technologie-Zentrum Informatik
Universität Bremen
Am Fallturm 1
28359 Bremen
Telefon: +49-421-218-7272
Fax: +49-421-218-7820
E-Mail: info@tzi.de
http://www.tzi.de

ISSN 1613-3773

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung / Motivation

1.1 Einleitung

Rationales Verhalten autonomer Softwaresysteme ist ein Kernproblem der Künstlichen Intelligenz. Das Spektrum der hierin zusammengefassten Fragestellungen reicht von der generellen Definition eines rationalen Agenten (Wooldridge und Jennings, 1995), über Konzepte zur praktischen Entscheidungsfindung (Bratman, 1987; Wooldridge, 2000), bis zur Repräsentation von und dem Umgang mit Wissen (Russell et al., 2004, S.397ff). Dabei spielen sowohl klassische Themen der KI wie Planung, logikbasiertes Reasoning, maschinelles Lernen und Umgang mit unsicherem Wissen (siehe hierzu generell (Russell et al., 2004)) wie auch neuere Entwicklungen, beispielsweise Problemlösung in verteilten Systemen und die damit verbundenen Interaktionsvoraussetzungen eine Rolle (vgl. (Wooldridge, 2000)).

In dieser Arbeit befassen wir uns innerhalb dieses Problemfeldes mit dem Aspekt der Wissensrepräsentation. Aufgrund der Situiertheit eines rationalen Agenten, wie oben angesprochen, in einer dynamischen Umgebung ergibt sich die Frage nach einer Repräsentation des Wissens über diese Umgebung, die eine angemessene Deliberation über die Vorgänge in der betreffenden Welt gestattet. Dies beinhaltet sowohl die Möglichkeit, über vergangene Ereignisse nachträglich Schlüsse ziehen zu können, als auch mögliche zukünftige Zustände der Welt zu beurteilen und die Ergebnisse einer solchen Beurteilung in die Planung der eigenen Handlungen einzubeziehen.

Der folgende Unterabschnitt erläutert die genaue Problemstellung, die Gegenstand dieser Arbeit ist. Dabei wird zunächst auf den konkreten Inhalt der Arbeit eingegangen und nachfolgend die Einordnung in den oben angerissenen Kontext verdeutlicht. In Abschnitt 1.3 schließlich erläutern wir kurz den generellen Aufbau der nachfolgenden Abschnitte.

1.2 Problemstellung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Untersuchung von paarweisen Verknüpfungen von Veränderungs-Intervallen zwischen Weltzuständen. Damit behandeln wir das angesprochene Problem, das aus der Kombination von statischen Wissensrepräsentationsverfahren mit einer dynamischen Umwelt erwächst: Die Veränderung der Welt über den Fortschritt der Zeit. Der besondere Fokus liegt hierbei auf der Verwendung von wohldefinierten und verbreiteten Verfahren zur Wissensrepräsentation, welche um eine temporale Komponente erweitert werden. Dazu wird in dieser Arbeit ein Kalkül definiert und dessen spezifische Eigenschaften formal untersucht.

Das Interesse an einer solchen Kombination ergibt sich aus der Tatsache, dass Wissensrepräsentationen mittels der in dieser Arbeit zugrunde gelegten Beschreibungslogiken – siehe (Baader et al., 2003) – keinerlei Schlüsse über Veränderungen in der Welt, die durch diese formal beschrieben wird, erlauben. Stattdessen wird davon ausgegangen, dass lediglich der aktuelle Zustand modelliert wird, was Schlüsse über vergangene Ereignisse oder Planung für zukünftige Entwicklungen ausschließt, da hierfür keine explizite Modellierung zur Verfügung steht. In dieser Arbeit wird daher eine solche Modellierung für Zustände der Welt zu bestimmten Zeitpunkten motiviert und formal aufgestellt. Diese erlaubt es, Veränderungen zwischen solchen Zeitpunkten zu verfolgen, indem Intervalle zwischen zwei Weltzuständen definiert und betrachtet werden können. Durch die Verwendung solcher Intervalle ist es schließlich möglich, die Veränderungen von einem Weltzustand zu einem anderen zu identifizieren und sogar nicht explizit vorgehaltene Weltzustände zu generieren, sofern ein initialer Zustand und die Veränderungen zum gewünschten Zustand bekannt sind.

Zu diesem Zweck ist es allerdings notwendig, alle Veränderungen bis zum gewünschten Zustand zusammenzufassen, um diesen dann ermitteln zu können. Da im Allgemeinen nicht vorausgesetzt werden kann, dass diese Veränderungen gesammelt zur Verfügung stehen, müssen sie über die Zeit ihres Auftretens akkumuliert werden, d.h. die Intervalle zwischen den einzelnen Zwischenschritten zum gewünschten Zielzustand müssen miteinander verknüpft werden, um ein einziges Ergebnisintervall zu erhalten. Der Hauptteil dieser Arbeit beschäftigt sich gerade mit dieser Problemstellung. Anhand eines Kalküls untersuchen wir Möglichkeiten solcher Verknüpfungen und zeigen Grenzen bzw. notwendige Voraussetzungen für den praktikablen Umgang mit Intervallen zwischen Weltzuständen auf.

Auf diese Weise wird eine wichtige Voraussetzung geschaffen, um über die Auswirkungen von Ereignissen und Aktionen auf die Umgebung eines Agenten sowie den Agenten selbst Inferenz betreiben zu können. Diese ermöglicht sowohl die nachträgliche Beurteilung vergangener Entwicklungen und kann damit beispielsweise zum Erlernen akkuraterer Modelle von Aktionskonsequenzen verwendet werden, wenn etwa bisher unbekannte Nebeneffekte einer Handlung identifiziert werden. Ebenso steht hiermit ein interessantes Mittel zur Verbesserung der Planung zukünftiger Aktionen zur Verfügung, indem mögliche Zustände der Welt, die sich aus den verschiedenen verfügbaren Handlungsoptionen eines Agenten ergeben, mit dem aktuellen Zustand sowie direkt miteinander verglichen werden können. Die praktische Motivation einer solchen Vergleichbarkeit und der daraus folgenden Beurteilbarkeit von möglichen Aktionen sowie Ereignissen in der Umgebung eines Agenten lässt sich am besten anhand eines Beispiels verdeutlichen:

Beispiel 1. Nehmen wir einen Agenten an, der innerhalb eines Logistik-Szenarios mit dem Transport einer empfindlichen Ware betraut ist (vgl. zu diesem Beispiel die Ausführungen in (Bemeleit et al., 2005)). Wenn es sich bei dieser Ware beispielsweise um eine Ladung Papier handelt, so lässt sich mittels der angesprochenen Beschreibungslogiken modellieren, dass diese zerstört wird, wenn sie mit Wasser in Berührung kommt, was sie empfindlich gegenüber regnerischem Wetter macht. Es besteht somit ein Risiko für die Erfüllung des Ziels des Agenten, nämlich den unbeschadeten Transport der Ware, wenn der Agent nicht für angemessenen Schutz vor den Auswirkungen des Wetters sorgt.

Steht allerdings eine derartige Definition dieses Risikos zur Verfügung, kann der Agent diese während seiner Planung berücksichtigen und Aktionen und Ereignisse identifizieren, die seine Ziele gefährden. So kann etwa aufgrund einer entsprechenden Wettervorhersage oder der Beobachtung von Regen am vorgesehenen Umschlagplatz die Verwendung einer offenen Laderampe verworfen und stattdessen eine überdachte und damit sichere Alternative bevorzugt werden.

Die Identifikation bekannter Risikomuster in den angesprochenen Unterschieden zwischen zwei Zuständen der Welt ermöglicht damit gerade diese für das Ziel des Agenten riskanten Situationen zu vermeiden und angemessene Gegenstrategien oder alternative Lösungspläne zu entwickeln. Konkret bedeutet dies, dass bereits bei der Planung von Aktionen die möglichen Risiken in den erwarteten Weltzuständen, die das Ergebnis geplanter Aktionen sind, erkannt und direkt in die Planung mit einbezogen werden können. Damit legt die in dieser Arbeit behandelte Problemstellung die Grundlage für rationale und risikobewusste Handlungen autonomer Agenten.

1.3 Aufbau der Arbeit

Nachfolgend gliedert sich der Hauptteil dieser Arbeit in zwei Kapitel:

Zunächst beschreiben wir die formalen Grundlagen der späteren Betrachtungen. Dabei wird eine kurze Einführung in die Beschreibungslogiken als Basis moderner Wissensrepräsentation, sowie eine formale Spezifikation der angesprochenen Weltzustände und

Intervalle zwischen diesen gegeben. In diesem Zusammenhang gehen wir ebenfalls auf die Intervallalgebra nach (Allen, 1983) ein, die große Auswirkungen auf den Kalkül, der den eigentlichen Kern dieser Arbeit darstellt, besitzt.

Das zweite Kapitel des Hauptteils beinhaltet die Definition und Analyse des angesprochenen Kalküls. Hier wird sowohl Syntax als auch Semantik formal definiert und bewiesen, wobei die Struktur der Syntaxdefinition und der nachfolgenden Aufstellung von Regeln sich am gängigen Aufbau mathematischer Kalküle orientiert (vgl. (Curry, 1963; Tarski, 1977; Winter, 2001)). Die Regeln sind dabei nach den zuvor eingeführten Intervallrelationen nach (Allen, 1983) sortiert und werden direkt auf ihre Definition folgend im Einzelnen bewiesen.

Sowohl der Grundlagenteil als auch das Kapitel über den Kalkül werden an ihrem jeweiligen Ende kurz zusammengefasst. Dies dient der Herstellung des Zusammenhangs der betrachteten Aspekte mit der oben dargelegten Problemstellung und erlaubt so eine Rekapitulation der Zwischenergebnisse, auf denen im nachfolgenden Teil aufgebaut wird bzw. die in der abschließenden Betrachtung nochmals thematisiert werden.

Den Abschluss der Arbeit bilden schließlich eine zusammenfassende Betrachtung der Ergebnisse sowie einige Ausblicke auf weiterführende Untersuchungen, die Gegenstand nachfolgender Forschungen sein können.

Kapitel 2

Grundlagen

Um zu einer formalen Betrachtung von Wissensmodellierung und in der weiteren Fortsetzung dieser Arbeit der Definition von Weltzuständen und deren Unterschieden zu kommen, müssen wir uns zunächst auf einen geeigneten Formalismus zur Wissensrepräsentation festlegen. Dabei fällt die Wahl auf die Familie der Beschreibungslogiken, die im folgenden Abschnitt näher beschrieben werden. Nach einer kurzen Einführung gehen wir dabei auf die Gründe dieser Wahl ein und liefern in den weiteren Abschnitten grundlegende Definitionen sowie Erklärungen zu den Zusammenhängen im Kontext dieser Arbeit. Darauf folgend erarbeiten wir eine Definition des Begriffs *Weltzustand* auf Basis von Beschreibungslogiken und führen die bereits angesprochenen Intervalle zwischen diesen Weltzuständen formal ein. Im Hinblick auf die Möglichkeiten der Verknüpfung mehrerer Intervalle gehen wir schließlich auf Relationen ein, die zwischen solchen Intervallen bestehen können. Eine kurze Zusammenfassung der Zwischenergebnisse unter dem Aspekt der generellen Problemstellung dieser Arbeit schließt diesen Abschnitt ab.

2.1 Beschreibungslogik

Beschreibungslogiken sind eine Familie logischer Sprachen verschiedener Ausdrucksmächtigkeit zur Repräsentation von Wissen. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, die Terminologie einer Domäne formal zu definieren sowie Inferenz darauf zu betreiben. Darüber hinaus können vorhandene Individuen anhand einer Terminologie klassifiziert und weiteres Wissen über sie inferiert werden. Der Unterscheidung zwischen der Terminologie einer Domäne und der tatsächlich vorhandenen Individuen in einem spezifischen Szenario entsprechend, unterteilt man eine Wissensbasis in Beschreibungslogik gewöhnlich in zwei Teile: die T-Box und die A-Box.

In der T-Box $\mathcal{T}$ wird das terminologische Wissen über die Domäne definiert. Eine solche Terminologie besteht aus Konzepten und Relationen (in der Literatur auch häufig als Rollen bezeichnet) zwischen diesen. Folgendes Beispiel verdeutlicht dies anhand eines

Ausschnittes aus einer Definition von Familienverhältnissen (nach (Baader et al., 2003, S. 55f)):

Beispiel 2. Seien die Konzepte Person und Female von Vornherein bekannte atomare Konzepte. Dann können weitere Konzepte hierarchisch von diesen abgeleitet werden sowie mittels der Relation hasChild deren Verbindung miteinander definiert werden:

$$\mathsf{Woman} \equiv \mathsf{Person} \sqcap \mathsf{Female}$$
$$\mathsf{Mother} \equiv \mathsf{Woman} \sqcap \exists \mathsf{hasChild}.\mathsf{Person}$$

Umgangssprachlich bedeutet die zweite Definition: „Eine Mutter ist eine Frau, für die zutrifft, dass sie ein Kind hat, welches wiederum eine Person ist" – bzw. noch genauer: „Eine Mutter ist eine Frau, für die zusätzlich gilt, dass in mindestens einer ihrer hasChild-Beziehungen eine Person steht."[1] Die Tatsache, dass die Frau eine hasChild-Beziehung besitzt, wird hier implizit definiert.

Die Hierarchie einer solchen Definition wird deutlich, wenn diese in eine graphische Repräsentation, wie in Abbildung 2.1, überführt wird – die in der Graphik aufgeführte is-a Relation ergibt sich hier implizit durch die Definition der einzelnen Konzepte.

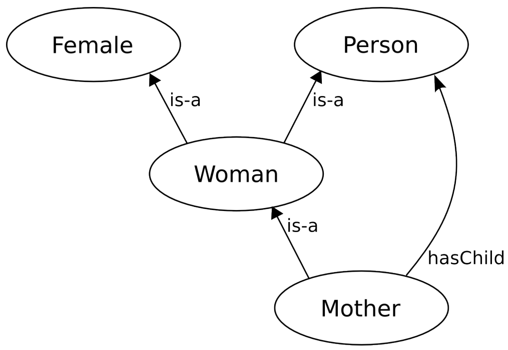

Abbildung 2.1: Graphische Repräsentation der Familienterminologie

Wie aus diesem Beispiel ersichtlich ist, werden zur Definition einer Terminologie einige Konzepte benötigt, die vorausgesetzt werden müssen und ausschließlich auf der rechten

[1] Umgangssprachlich würde man die Voraussetzung, dass es sich bei dem Kind um eine Person handelt, als selbstverständlich annehmen. Formal ist diese Angabe jedoch erforderlich, da sich die Relation hasChild auf etwas beziehen muss.

Seite von Konzeptdefinitionen auftauchen. Aus diesen werden alle anderen Konzepte abgeleitet. Auf diese Weise und unter der Verwendung von Relationen, die zwei Konzepte miteinander verknüpfen, lassen sich umfangreiche Domänenterminologien sehr kompakt darstellen.

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass eine Übersetzung einer solchen Terminologie in prädikatenlogische Terme problemlos möglich ist: In diesem Fall handelt es sich bei einem Konzept einfach um ein einstelliges Prädikat, während eine Relation durch ein zweistelliges Prädikat dargestellt werden kann. Da jedoch die Prädikatenlogik bekanntermaßen lediglich semientscheidbar ist (Russell et al., 2004, S. 344), ist eine solche Überführung in der Regel nicht sinnvoll.

Hier liegt nämlich einer der großen Vorteile der Beschreibungslogik: Durch Hinzufügen von Operatoren und bestimmten Konstrukten zu einer gemeinsamen Grundsprache kann die Ausdrucksmächtigkeit und auch die Entscheidbarkeit sowie die Aufwandsklasse des Reasoning beeinflusst werden. So ist es möglich, für das jeweils behandelte Problem die passende Repräsentationssprache auszuwählen. Als Beispiele für mögliche Erweiterungen seien hier die Negation bzw. das Komplement von Konzepten sowie hierarchische, inverse und transitive Relationen genannt.

An dieser Stelle soll jedoch nicht weiter auf die Details solcher Erweiterungen eingegangen werden. Ebenso verzichten wir hier auf eine genaue Erläuterung zur formalen Semantik von beschreibungslogischen Terminologien – die intuitiv zugängliche Semantik aus Beispiel 2 reicht für einen grundlegenden Eindruck zu diesem Thema. Entscheidender für die weiteren Betrachtungen ist der zweite Teil einer Wissensbasis auf der Grundlage von Beschreibungslogik, nämlich die Repräsentation des assertionalen Wissens in der sogenannten A-Box.

Eine A-Box $\mathcal{A}$ enthält sämtliche Informationen, die über tatsächlich in der Welt vorhandene Elemente zur Verfügung stehen. Solche Elemente bezeichnet man als Individuen, von denen jedes eindeutig bezeichnet ist. Deren Zuordnung zu Klassen von Konzepten sowie deren Relationen untereinander, sind die Bestandteile der A-Box:

> In the ABox, one introduces individuals, by giving them names, and one asserts properties of these individuals. (Baader et al., 2003, S. 63)

Die Zuordnung von Individuen mit Namen a, b, c zu Konzepten C und Relationen R erfolgt durch Terme der Form (vgl. (Baader et al., 2003, S. 64)):

$$C(a) \text{ und } R(b, c)$$

Folgendes Beispiel verdeutlicht diesen Sachverhalt nochmals auf anschaulichere Weise:

Beispiel 3. Eine mögliche A-Box zur Familen-T-Box aus Beispiel 2 könnte folgende Aussagen enthalten:

$$\mathsf{Mother}(\mathsf{MARY})$$
$$\mathsf{hasChild}(\mathsf{MARY}, \mathsf{PAUL})$$

Hier sind nun also zwei Individuen mit den Namen MARY und PAUL vorhanden, wobei wir von MARY wissen, dass sie der Konzeptklasse Mother angehört. Die Relation hasChild, in der sich MARY zu PAUL befindet besagt, dass MARY die Mutter von PAUL ist – die inverse Relation, dass PAUL der Sohn von MARY ist, ist in der Terminologie in dieser einfachen Form nicht vorhanden und kann daher nicht ohne weiteres ausgedrückt werden (hier müsste die Terminologie noch erweitert werden).

Auf diese Weise lassen sich nun sämtliche Individuen in einer konkreten Ausprägung einer Domäne beschreiben und ihre Zusammenhänge untereinander definieren. Dabei ist zu beachten, dass die Semantik der A-Box von einem offenen Weltmodell ausgeht, dass also über alles, was nicht explizit definiert wurde, keine Aussage getroffen werden kann. Dies steht im Gegensatz zur sogenannten *Closed World Assumption*, nach der sämtliche Aussagen, die nicht explizit als wahr angegeben werden, als falsch gelten müssen (Hustadt, 1994, S. 1). Daraus folgt, dass eine A-Box nicht zwangsläufig vollständig ist, sondern lediglich die Menge der aktuell zur Verfügung stehenden Informationen über die Welt umfasst. Diese Tatsache unterscheidet derlei Repräsentation von Wissen über die Individuen einer Domäne insbesondere von derjenigen mittels klassischer relationaler Datenbanken – vgl. (Baader et al., 2003, S. 64).

Formal ist eine A-Box $\mathcal{A}$ damit schließlich eine endliche Menge von Zuweisungen von Individuen zu Konzepten und Relationen in der Form, wie oben aufgeführt. Gerade diese Definition ist neben der Verbreitung und dem guten Verständnis der Beschreibungslogiken der Grund, diesen Formalismus als Grundlage zur Wissensrepräsentation im Rahmen dieser Arbeit zu verwenden. Wie in den folgenden Abschnitten weiter ausgeführt wird, lassen sich damit sämtliche Sachverhalte auf die zugrundeliegenden Mengen zurückführen, deren Operationen wohldefiniert sind und einfach als Grundlage vorausgesetzt werden können.

2.2 Weltzustände und Intervalle

Im Sinne von Beschreibungslogiken ist der aktuelle Zustand der Welt gleich dem Inhalt der A-Box. Allerdings sieht der Formalismus keinerlei Mechanismen vor, über vergangene Zustände, oder gar solche, die in der Zukunft liegen, Inferenz zu betreiben. Vielmehr – um auf die eingangs erwähnte Thematik der Agentensysteme Bezug zu nehmen – ändert sich die A-Box fortlaufend nach der Wahrnehmung des jeweiligen

Agenten und entspricht damit immer dem gegenwärtigen Zustand der Welt (genau genommen dem Zustand zum Zeitpunkt der letzten Wahrnehmung des Agenten).

Zur Betrachtung von vergangenen und zukünftigen Zuständen der Welt ist es daher notwendig, das Konzept der Beschreibungslogiken zu erweitern, da diese eine fortschreitende Zeit nicht berücksichtigen. Unter Voraussetzung einer solchen fortschreitenden Zeit kann man den aktuellen Zustand der Welt einem Zeitpunkt t zuordnen. Zu diesem Zeitpunkt ist der Inhalt der A-Box genau der Zustand der Welt. Schreitet die Zeit nun fort, so gibt es einen Zeitpunkt u mit $u \succ t$, der bei Erreichen zum aktuellen Zeitpunkt wird. Über den Zeitraum zwischen u und t verändert sich die A-Box gegebenenfalls – entsprechend den Veränderungen in der Welt. Damit lässt sich feststellen, dass eine A-Box verknüpft mit einem bestimmten Zeitpunkt den Zustand der Welt zu genau diesem Zeitpunkt darstellt. Wir verwenden im Folgenden hierfür die Schreibweise:

$$\ldots,\ \mathcal{A}_t,\ \mathcal{A}_u,\ \ldots$$

Auf diese Weise werden die Beschreibungslogiken um eine temporale Komponente erweitert, indem mehrere A-Boxen zu verschiedenen Zeitpunkten erlaubt werden. Inferenz im Sinne klassischer Beschreibungslogik kann dabei weiterhin betrieben werden, wenn ein einzelner Zeitpunkt ausgewählt wird und nur die entsprechende A-Box Verwendung findet. Die Terminologie wird als unabhängig von der fortschreitenden Zeit (statisch) angenommen.

Für die Zeitpunkte werden im Folgenden als Bezeichnungen die Buchstaben s, t, u, v verwendet, wobei eine distinkte Ordnung mit $s \prec t \prec u \prec v$ vorausgesetzt wird. Die Menge aller Zeitpunkte wird mit T bezeichnet und ist wie folgt definiert:

$$T = \{\ldots \prec s \prec t \prec u \prec v \prec \ldots\}$$

Weiterhin wird ein kontinuierlicher Fortschritt der Zeit angenommen (im Gegensatz zu diskret fortschreitender Zeit), so dass gilt:

$$\begin{aligned} &\forall\, U, V \in T \\ &\quad \exists\, U' \in T \text{ mit } U \prec U' \prec V \end{aligned}$$

Auf diese Weise lässt sich für jeden einzelnen Zeitpunkt $t \in T$ ein Weltzustand definieren als $\mathcal{A}_t$.

Vergleicht man nun zwei solche Weltzustände $\mathcal{A}_s$ und $\mathcal{A}_t$, so lassen sich Aussagen über die Veränderung der Welt innerhalb des temporalen Intervalls zwischen s und t treffen. Hier machen wir uns den Vorteil zunutze, dass ein Weltzustand lediglich eine Menge ist. Der Unterschied zwischen zwei Mengen A und B ist nämlich gerade deren symmetrische Differenz $A \Delta B$. Diese ist definiert als:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Dabei bezeichnet der Term $(A \setminus B)$ die Menge der Elemente, die A enthält, nicht jedoch B, während $(B \setminus A)$ die Menge der Elemente ist, die in B, aber nicht in A vorhanden sind. Im Kontext von Weltzuständen beinhaltet die symmetrische Differenz also genau die Elemente der Welt, die zwischen dem ersten und dem zweiten Zustand hinzukommen, sowie diejenigen, die zwar im ersten Zustand noch vorhanden sind, jedoch im Zeitraum bis zum zweiten verloren gehen bzw. nicht mehr in der Welt vorhanden sind. Da dies nicht nur auf Konzeptklassen von Individuen beschränkt ist, sondern auch auf ihre zugeordneten Eigenschaften, können sich somit einfach die Eigenschaften eines Individuums ändern, indem die alte Zuordnung entfernt und ggf. eine neue hinzugefügt wird. Dabei müssen sich natürlich die alte und die neue Eigenschaft unterscheiden, da andernfalls keine Änderung vorläge.

Unter Voraussetzung der Kenntnis solcher Unterschiede zwischen Mengen, liegt der Schluss nahe, dass die Mengen selbst aus diesen ermittelt werden können, sofern man einen Mechanismus kennt, diese Unterschiede miteinander zu verknüpfen. Insbesondere über temporale Intervalle zwischen den Weltzuständen kann so auf einen bestimmten Zustand geschlossen werden, ohne diesen explizit kennen zu müssen, sofern man Kenntnis von einem vergangenen Zustand und den seitdem erfolgten Veränderungen der Welt besitzt[2]. Unter diesem Gesichtspunkt spezifizieren wir nun den Unterschied zwischen zwei Mengen für die Verwendung als temporales Intervall zwischen Weltzuständen.

Ein Intervall zwischen den Weltzuständen $\mathcal{A}_s$ und $\mathcal{A}_t$ bezeichnen wir als $\Delta_{(s,t)}$. Dieses beinhaltet alle Unterschiede zwischen den beiden Zuständen. Um die Verrechnung mehrerer solcher Intervalle später zu vereinfachen, bilden wir jedoch nicht die symmetrische Differenz als einzelne Menge, sondern definieren das Intervall als Tupel der Menge der hinzugefügten Elemente und der Menge der Elemente, die über den betrachteten Zeitraum entfernt werden. Erstere Menge bezeichnen wir nachfolgend als $D^+_{(s,t)}$, letztere als $D^-_{(s,t)}$. Allgemein ausgedrückt gilt damit:

$$\begin{aligned} \Delta_A &= (D^+_A, D^-_A) \\ A &\in \{(S,F) \mid S,F \in T \wedge S \prec F\} \end{aligned}$$

Die Bezeichnungen S und F stehen für den Beginn (*start*) und das Ende (*finish*) des Zeitraums, über dem das jeweilige Intervall definiert ist. Dabei wird verlangt, dass diese Grenzen nicht in demselben Zeitpunkt zusammenfallen – das längenlose Intervall ist also ausgeschlossen, wie unten noch weiter ausgeführt wird.

Die beiden Elemente des Tupels, welches das Intervall bildet, werden dabei mittels der beiden Terme aus der Definition der symmetrischen Differenz zweier Mengen gebil-

[2]Umgekehrt dazu kann auch die Kenntnis von einem zukünftigen Zustand und den Veränderungen, die zu diesem führen, verwendet werden.

det:

$$D_A^+ = \mathcal{A}_F \setminus \mathcal{A}_S$$
$$D_A^- = \mathcal{A}_S \setminus \mathcal{A}_F$$

Dabei ist zu beachten, dass D_A^+ und D_A^- disjunkt sind ($D_A^+ \cap D_A^- = \emptyset$), was leicht zu zeigen ist:

Beweis. Angenommen, es läge keine Disjunktheit vor. Dann gibt es ein Element φ, für das gilt: $\varphi \in D_A^+ \wedge \varphi \in D_A^-$. Aus $\varphi \in D_A^+$ folgt dabei, dass $\varphi \in \mathcal{A}_F \wedge \varphi \notin \mathcal{A}_S$. Unter dieser Voraussetzung gilt allerdings, dass $\varphi \notin (\mathcal{A}_S \setminus \mathcal{A}_F)$, was im Widerspruch zur Annahme, die Mengen wären nicht diskjunkt, steht. Somit muss Disjunktheit vorliegen. □

Ein solches Intervall kann nun verwendet werden, um von einem Weltzustand auf einen anderen zu schließen, vorausgesetzt, der bereits bekannte Zustand liegt an einem Zeitpunkt, der das Intervall begrenzt. In diesem Fall kann entweder ein vorhergehender oder ein nachfolgender Zustand ermittelt werden, je nachdem, ob der bekannte Zustand am Beginn oder am Ende des Intervalls liegt:

$$\begin{aligned} A &\in \{(S, F) \mid S, F \in T \wedge S \prec F\} \\ \mathcal{A}_F &= \mathcal{A}_S + \Delta_A \\ &= (\mathcal{A}_S \setminus D_A^-) \cup D_A^+ \\ \mathcal{A}_S &= \mathcal{A}_F - \Delta_A \\ &= (\mathcal{A}_F \setminus D_A^+) \cup D_A^- \end{aligned}$$

Die Korrektheit dieser Berechnungsvorschriften lässt sich direkt durch Einsetzen der obigen Definitionen überprüfen:

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_F &= \mathcal{A}_S + \Delta_A \\ &= (\mathcal{A}_S \setminus D_A^-) \cup D_A^+ \\ &= (\mathcal{A}_S \setminus (\mathcal{A}_S \setminus \mathcal{A}_F)) \cup (\mathcal{A}_F \setminus \mathcal{A}_S) \\ &= ((\mathcal{A}_S \setminus \mathcal{A}_S) \cup (\mathcal{A}_S \cap \mathcal{A}_F)) \cup (\mathcal{A}_F \setminus \mathcal{A}_S) \\ &= (\mathcal{A}_S \cap \mathcal{A}_F) \cup (\mathcal{A}_F \setminus \mathcal{A}_S) \\ &= \mathcal{A}_F \end{aligned}$$

Da für den umgekehrten Fall lediglich die Bezeichnungen vertauscht sind, erfolgt der Beweis komplett analog und braucht hier nicht explizit aufgeführt zu werden. □

Unter diesen Voraussetzungen kann nun also von einem initialen Weltzustand auf jeden beliebigen anderen geschlossen werden, sofern das Intervall zwischen diesen beiden bekannt ist.

2.3 Relationen zwischen Intervallen

Wie oben gezeigt, lässt sich mittels unserer Intervalle von einem Weltzustand auf einen anderen schließen. Die Frage bleibt allerdings, wie zu verfahren ist, wenn mehrere Intervalle bekannt sind, deren akkumulierte Veränderungen zum gewünschten Ziel führen. Wie einleitend erläutert, ergibt sich hieraus die hauptsächliche Problemstellung dieser Arbeit.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns in allen folgenden Betrachtungen auf die Verknüpfung jeweils zweier Intervalle miteinander – das sich daraus ergebende Ergebnisintervall kann dann mit einem weiteren verknüpft und es können so beliebig viele Intervalle behandelt werden. Wir werden später sehen, dass hierbei die Reihenfolge keineswegs außer Acht gelassen werden darf, die Lösung dieses Problems ist allerdings nicht mehr Teil dieser Arbeit.

Betrachten wir nun also zwei unserer Intervalle, so lässt sich intuitiv feststellen, dass diese in einer qualitativen Relation zueinander stehen. Da es sich um abgeschlossene temporale Intervalle handelt, sind diese Relationen ebenfalls zeitlicher Art. Das folgende kleine Beispiel soll dies verdeutlichen:

Beispiel 4. Seien $\Delta_{(s,t)}$ und $\Delta_{(t,u)}$ zwei Intervalle wie oben definiert. Dann ist offensichtlich, dass ersteres Intervall zu demselben Zeitpunkt endet, an dem das Letztere beginnt. Aus dieser Tatsache und der distinkten Ordnung für die Reihenfolge der Zeitpunkte folgt, dass das erste Intervall vor dem zweiten liegen muss – also sind die Intervalle angrenzend disjunkt. Umgangssprachlich ausgedrückt könnte man sagen, dass das erste Intervall das Letztere berührt bzw. – vom inversen Blickwinkel betrachtet – letzteres Intervall vom Ersteren berührt wird.

Solcherart qualitative Relationen zwischen abgeschlossenen temporalen Intervallen bilden die Grundlage für die Intervallalgebra von Allen (Allen, 1983), an die das obige Beispiel angelehnt ist und auf die im Folgenden kurz eingegangen wird.

Allen benennt in seiner Arbeit sämtliche Relationen, die zwischen zwei solchen Intervallen existieren können (vgl. Abbildung 2.2), und stellt ein Verfahren vor, über solcherart qualitativer Information Reasoning zu betreiben. Dabei geht er insbesondere auf die transitiven Eigenschaften der möglichen Relationen ein und stellt eine Tabelle auf, aus der sich die möglichen Relationen zweier Intervalle zueinander ablesen lassen, wenn deren jeweilige Relation zu einem dritten Intervall bekannt ist ($X\ rel\ Z$, gegeben $X\ rel\ Y$ und $Y\ rel\ Z$).

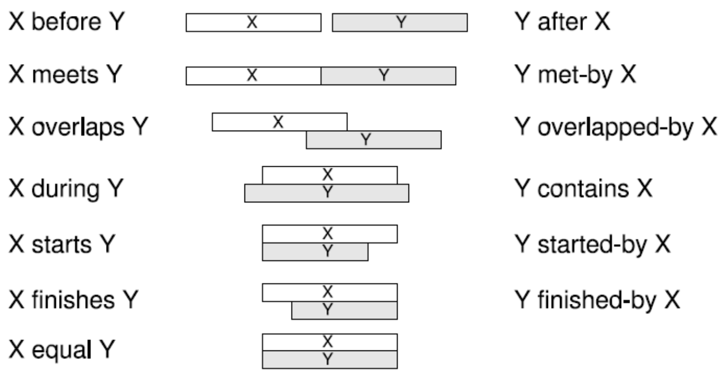

Abbildung 2.2: Temporale Relationen zwischen Intervallen ((Lattner, 2007, S. 61) nach (Allen, 1983))

Auf die Transitivitätseigenschaften der Relationen gehen wir allerdings an dieser Stelle nicht weiter ein. Entscheidend ist vielmehr die Erkenntnis dass die in Abbildung 2.2 gezeigten 13 Relationen tatsächlich alle überhaupt nur Möglichen zwischen zwei Intervallen darstellen, wie Allen darlegt (Allen, 1983, S. 834f). Demnach können wir für unsere Intervalle sämtliche Verknüpfungen berechnen, wenn für jede der Relationen eine Vorschrift existiert, wie diese Berechnung zu erfolgen hat. Genau dies ist Inhalt des Kalküls, der im weiteren Verlauf dieser Arbeit behandelt wird.

2.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir zunächst den Formalismus der Beschreibungslogiken zur Repräsentation von Wissen über eine bestimmte Domäne eingeführt. Dabei haben wir gesehen, dass die Modellierung des aktuellen Zustands der modellierten Welt genau der Menge der in ihr vorhandenen Individuen und deren Eigenschaften entspricht.

Auf dieser Basis haben wir dann eine formale Beschreibung von Weltzuständen und Intervallen zwischen diesen Zuständen entwickelt, die Beschreibungslogiken um eine temporale Komponente erweitert. Wir haben gesehen, dass die Verrechnung von Weltzuständen mit angrenzenden Intervalle den Schluss auf weitere Weltzustände erlaubt, wodurch es genügt, sich im Folgenden ausschließlich mit den Intervallen zu beschäftigen, da sich jeder beliebige Zustand ermitteln lässt, sofern ein Initialzustand und ein passendes Intervall bekannt sind.

Damit haben wir die Grundlage für die eigentliche Problemstellung, die Verknüpfung von Intervallen, um zu dem benötigten Gesamtintervall vom Initial- zum Zielzustand zu gelangen, erarbeitet. Wie in Abschnitt 2.3 erörtert, reicht es zu diesem Zweck aus, jeweils paarweise Verknüpfungen von Intervallen zu betrachten. Dabei kann es zwischen den zu verknüpfenden Intervallen genau 13 verschiedene Relationen geben. Lässt sich für jede dieser Relationen eine Vorschrift aufstellen, wie das resultierende Intervall zu berechnen ist, so sind alle nur möglichen Fälle abgedeckt und wir haben ein Verfahren, welches das oben genannte Problem löst.

Ein Vorschlag für einen solchen Kalkül bildet den Inhalt des nächsten Kapitels dieser Arbeit.

Kapitel 3

Kalkül zur Verknüpfung von Intervallen

Die folgenden Abschnitte bilden den eigentlichen Kern dieser Arbeit. In diesem Kapitel wird der entwickelte Kalkül zur Verrechnung der oben eingeführten Intervalle zwischen einzelnen Weltzuständen vorgestellt und besprochen. Dabei gehen wir zunächst auf die Syntax der im Kalkül gültigen Ausdrücke ein, welche formal definiert wird. Der darauf folgende Teil befasst sich mit der Semantik dieser Ausdrücke, indem die Operatoren, mit denen einzelne Ausdrücke verknüpft werden können, in ihrer semantischen Bedeutung definiert werden. Auf Basis dieser Definitionen schließlich werden für alle möglichen Kombinationen von Operatoren und Intervallen Transformationsregeln aufgestellt. Jede einzelne dieser Regeln wird dabei auf ihre Korrektheit im Sinne der Semantik der Operatoren überprüft und auf diese Weise formal begründet.

3.1 Syntax: Ausdrücke / Sätze

Ausdrücke im Sinne des vorgestellten Kalküls bilden sämtliche Intervalle der Form $\Delta_{(s,t)}$, wie in Abschnitt 2.2 definiert, wobei insbesondere die genannte distinkte Ordnung für alle vorkommenden s, t, u, v zu beachten ist, so dass $s \prec t \prec u \prec v$.

Auf diese Weise ist das Intervall der Länge 0 explizit ausgeschlossen. Dieses ist nach (Allen, 1983) ebenfalls nicht erlaubt, was zur Vereinfachung hier übernommen wird. Da jedoch nicht alle der nachfolgend besprochenen Operatoren in sämtlichen Intervallrelationen gültige Ergebnisse liefern, tritt an die Stelle dieses Intervalls ein spezieller Ausdruck $\emptyset$, der als undefinierter Ausdruck betrachtet werden kann. Auf diese Weise kann sicher gestellt werden, dass sich sämtliche zusammengesetzte Sätze (solche, die mittels Operatoren miteinander verküpft werden) syntaktisch korrekt bilden lassen, jedoch die Semantik der Undefiniertheit erhalten bleibt.[1]

[1] Semantisch ergeben alle Sätze, in denen $\emptyset$ vorkommt, wiederum $\emptyset$ – nähere Betrachtungen hierzu weiter unten in diesem Kapitel.

Zur Verknüpfung von Ausdrücken zu zusammengesetzten Sätzen werden drei Operationen definiert:

1. Vereinigung (z.B.: $(\Delta_{(s,t)} \cup \Delta_{(t,u)})$)
2. Schnitt (z.B.: $(\Delta_{(s,u)} \cap \Delta_{(t,u)})$)
3. Differenz (z.B.: $(\Delta_{(s,u)} \setminus \Delta_{(t,u)})$)

Mittels dieser Operatoren können jeweils zwei Sätze miteinander verknüpft werden – es handelt sich also um binäre Operatoren. Als Notation wird, wie in den oben stehenden kurzen Beispielen gezeigt, die Infixschreibweise verwendet, wobei der jeweils zusammengesetzte Ausdruck durch zwei runde Klammern eingerahmt wird. Dies geschieht zur Vermeidung von Ambiguitäten in der Semantik komplexer Ausdrücke mit mehr als einem Operator.

Folgende BNF-Darstellung fasst die Syntax der im Kalkül gültigen Sätze formal zusammen:

$$
\begin{aligned}
< \mathsf{sentence} > &::= < \mathsf{atomic\_sentence} > \\
&\quad\ \mid (< \mathsf{sentence} >< \mathsf{operator} >< \mathsf{sentence} >) \\
< \mathsf{operator} > &::= \cup \mid \cap \mid \setminus \\
< \mathsf{atomic\_sentence} > &::= \Delta_{<\mathsf{period}>} \mid \emptyset \\
< \mathsf{period} > &::= (< \mathsf{moment} >, < \mathsf{moment} >) \\
< \mathsf{moment} > &::= \ \ldots \mid s \mid t \mid u \mid v \mid \ldots
\end{aligned}
$$

Abbildung 3.1: BNF-Darstellung der Syntax des Kalküls.

3.2 Semantik: Operatoren und Transformationsregeln

In diesem Abschnitt werden die Transformationsregeln für Sätze des Kalküls vorgestellt und analysiert. Diese Untersuchung gliedert sich in verschiedene Teile, abhängig von der temporalen Relation zweier Intervalle zueinander nach (Allen, 1983). Für jede Relation werden dabei Transformationsregeln für alle drei Operatoren definiert und deren semantische Korrektheit bewiesen.

Unabhängig von den Relationen existieren einige Regeln, die immer gelten. Im Anschluss an die Definition der Semantik der Operatoren werden diese gesondert betrachtet.

3.2.1 Semantik der Operatoren

Die Semantik der drei Operatoren für die Vereinigung, den Schnitt und die Differenz zwischen zwei Intervallen ist angelehnt an diejenige der mengentheoretischen Operationen mit denselben Symbolen.

Für die Vereinigung gilt, dass diese Operation zwei Intervalle zu einem einzigen zusammenfasst, welches den Zeitraum zwischen dem Beginn des früheren und dem Ende des späteren Intervalls beschreibt. Dieses ist nicht bei allen Relationen sinnvoll zu erzeugen, daher kann das Ergebnis auch undefiniert sein (die zu berücksichtigenden Voraussetzungen werden in den folgenden Abschnitten für die jeweiligen Relationen im Detail besprochen – ebenso gilt dies für die restlichen beiden Operationen). Formal ausgedrückt lautet die Definition der Vereinigung zweier Intervalle folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
\Delta_A \cup \Delta_B &= \Delta_C \\
&\text{mit} \\
\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C &\in \{\Delta_x \mid x \in P\} \cup \emptyset \\
P &= \{(S, F) \mid S, F \in T, S \prec F\} \\
T &= \{\ldots \prec s \prec t \prec u \prec v \prec \ldots\} \\
C &= (min(S_A, S_B), max(F_A, F_B)) \\
&\text{dabei gilt:} \\
min(X, Y) &= \begin{cases} X, \text{wenn } X \preceq Y \\ Y, \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit } X, Y \in T \\
max(X, Y) &= \begin{cases} X, \text{wenn } X \succeq Y \\ Y, \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit } X, Y \in T
\end{aligned}
$$

Die Intervalle $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ können gewöhnliche Intervalle, wie oben (Abschnitt 2.2) definiert, sein.Bei jedem einzelnen kann es sich alternativ aber auch um das undefinierte Intervall handeln. Für den Fall, dass das Ergebnis Δ_C ein reguläres Intervall darstellt ($\Delta_C \neq \emptyset$) gilt, dass der Startzeitpunkt S_C des Tupels C genau der frühere Zeitpunkt der beiden Startzeitpunkte S_A, S_B der Tupel A und B ist. Analog dazu wird für den Endpunkt des Resultats der spätere Endpunkt dieser Tupel verwendet. Zur Bildung eines regulären Intervalls als Resultat kommt allerdings noch eine weitere Voraussetzung dazu, nämlich die Forderung, dass die beiden Ausgangsintervalle zusammen den gesamten Zeitraum abdecken, über dem das Ergebnisintervall aufgespannt ist. Formal bedeutet dies, dass es keinen Zeitpunkt geben darf, der zwischen einschließlich Start und Ende des resultierenden Intervalls liegt und der sich nicht zwischen einschließlich

Start und Ende eines der Ausgangsintervalle befindet:

$$\nexists X \in T$$
$$\text{mit}$$
$$X \succeq min(S_A, S_B) \wedge X \preceq max(F_A, F_B)$$
$$\text{und}$$
$$(\neg(X \succeq S_A \wedge X \preceq F_A) \vee \neg(X \succeq S_B \wedge X \preceq F_B))$$

Der Inhalt des resultierenden Intervalls hängt hierbei von der Relation der Ausgangsintervalle zueinander ab und wird in der weiteren Ausführung für jeden Fall gesondert besprochen.

Der Schnitt zweier Intervalle dagegen erzeugt genau das Intervall, welches den Zeitraum beschreibt, der von beiden Ausgangsintervallen abgedeckt wird. Eine solche Überlappung liegt vor, wenn sich ein Zeitpunkt X finden lässt, mit der Eigenschaft, dass der Beginn jedes der beiden Intervalle vor diesem liegt. Zusätzlich müssen beide Intervalle nach X enden. Aufgrund der in Abschnitt 2.2 getroffenen Annahme, dass der Zeitverlauf kontinuierlich erfolgt, kann eine solche Überlappung beliebig klein sein, solange ihre Länge größer 0 bleibt. Wenn sich zwei Intervalle Δ_A, Δ_B überlappen, gilt also:

$$\exists X \in T$$
$$\text{mit}$$
$$S_A \prec X \wedge S_B \prec X \wedge X \prec F_A \wedge X \prec F_B$$

In allen anderen Fällen gibt es keine Überlappung zwischen den beiden Intervallen und der Schnitt ist damit undefiniert. Jedoch ist es, wie unten gezeigt wird, selbst in dem Falle, dass ein solcher Zeitpunkt X existiert, nicht immer möglich, ein reguläres Intervall für den Schnitt zu ermitteln. Allgemein gilt zunächst ähnlich zur Vereinigung:

$$\begin{aligned} (\Delta_A \cap \Delta_B) &= \Delta_C \\ &\text{mit} \\ \Delta_A, \Delta_B, \Delta_C &\in \{\Delta_x \mid x \in P\} \cup \emptyset \\ P &= \{(S, F) \mid S, F \in T \wedge S \prec F\} \end{aligned}$$

Sofern ein reguläres Intervall Δ_C konstruierbar ist ($\Delta_C \neq \emptyset$), gilt für das Tupel C

weiter:

$$C = \begin{cases} (S_B, F_A), \text{wenn } S_A \preceq S_B \wedge F_A \preceq F_B \\ (S_B, F_B), \text{wenn } S_A \preceq S_B \wedge F_B \prec F_A \\ (S_A, F_A), \text{wenn } S_B \prec S_A \wedge F_A \preceq F_B \\ (S_A, F_B), \text{wenn } S_B \prec S_A \wedge F_B \prec F_A \end{cases}$$

Welcher Fall tatsächlich vorliegt, ist wiederum von der Relation der Ausgangsintervalle Δ_A, Δ_B abhängig und wird an entsprechender Stelle näher betrachtet.

Die Differenz dagegen zieht genau diese Überlappung beider Intervalle vom ersten Intervall ab. Dabei wird allgemein abkürzend die Schreibweise $(\Delta_A \setminus \Delta_B)$ verwendet, die von der in den nachfolgenden Betrachtungen gelegentlich verwendeten expandierten Form $(\Delta_A \setminus^* (\Delta_A \cap \Delta_B))$ unterschieden werden muss. In der expandierten Form wird der Operator $\setminus$ mit einem hochgestellten Sternchen $(^*)$ markiert, um Verwechselungen zu vermeiden. Die Semantik des sich hiermit neu ergebenden (Hilfs-)Operators $\setminus^*$ wird dabei, wie nachfolgend, über den Schnitt und die Vereinigung definiert. Formal gilt für diese Operation, wie bei den beiden anderen, dass je nach Relation ein reguläres Intervall als Ergebnis nicht für jeden Fall sichergestellt werden kann:

$$\begin{aligned} (\Delta_A \setminus \Delta_B) &= (\Delta_A \setminus^* (\Delta_A \cap \Delta_B)) \\ (\Delta_A \setminus^* \Delta_B) &= \Delta_C \\ &\text{mit} \\ \Delta_A, \Delta_B, \Delta_C &\in \{\Delta_x \mid x \in P\} \cup \emptyset \\ P &= \{(S, F) \mid S, F \in T, S \prec F\} \end{aligned}$$

Für den Fall, dass $\Delta_C \neq \emptyset$, ist das Resultat dieser Operation über seine Umkehroperation definiert. Diese ist die Vereinigung zweier disjunkter Intervalle. Δ_C muss also solcherart beschaffen sein, dass es mit Δ_B disjunkt ist und die Vereinigung dieser beiden Intervalle gleich dem Intervall Δ_A ist. Die Disjunktheit der Intervalle Δ_B, Δ_C ist dabei eben die Nichterfüllung der Bedingung für deren Überlappung:

$$\begin{gathered} \nexists X \in T \\ \text{mit} \\ S_B \prec X \wedge S_C \prec X \wedge X \prec F_B \wedge X \prec F_C \end{gathered}$$

Oder einfacher ausgedrückt:

$$F_B \preceq S_C \vee F_C \preceq S_B$$

Dann gilt für die Differenz:

$$(\Delta_A \setminus^* \Delta_B) = \Delta_C$$
$$\text{so dass } \Delta_B, \Delta_C \text{ disjunkt sind und}$$
$$(\Delta_B \cup \Delta_C) = \Delta_A$$

Schließlich gilt auch für diese Operation, dass die genaue Ermittlung des Resultats für jede Relation der Ausgangsintervalle gesondert betrachtet werden muss, was in den entsprechenden Abschnitten unten erfolgt.

3.2.2 Allgemeine Regeln

Durch Anwendung der besprochenen Semantik der Operatoren können allgemeine Regeln zur Verwendung des undefinierten Intervalls $\emptyset$ gebildet werden:

$$(\Delta_{(s,t)} \cup \emptyset) = \emptyset \qquad (\emptyset \cup \Delta_{(s,t)}) = \emptyset$$
$$(\Delta_{(s,t)} \cap \emptyset) = \emptyset \qquad (\emptyset \cap \Delta_{(s,t)}) = \emptyset$$
$$(\Delta_{(s,t)} \setminus \emptyset) = \emptyset \qquad (\emptyset \setminus \Delta_{(s,t)}) = \emptyset$$

Beweis. Die Korrektheit dieser Regeln ergibt sich direkt aus der Definition von $\emptyset$ als semantisch undefiniertem Intervall.

Da dieses keinen Start- und keinen Endpunkt besitzt, gibt es im Falle der Vereinigung je nach Reihenfolge der Operanden entweder kein Tupel (S_B, F_B) oder aber kein Tupel (S_A, F_A). Wenn jedoch die Grenzen eines der beiden Intervalle nicht bekannt sind, kann kein reguläres Intervall Δ_C als Resultat gebildet werden, da die Gleichung $C = (min(S_A, S_B), max(F_A, F_B))$ nicht gelöst werden kann. Folglich muss die Vereinigung eines beliebigen Intervalls mit $\emptyset$ wiederum undefiniert sein.

Derselbe Umstand führt dazu, dass der Schnitt nicht ermittelt werden kann. Hier kann unter Fehlen der Grenzen eines der Intervalle die Bedingung für die Überlappung der Intervalle nicht erfüllt werden. Dementsprechend muss auch in diesem Fall das Ergebnis $\emptyset$ lauten.

Aufgrund des nicht definierten Schnitts, ist es schließlich auch nicht sinnvoll möglich diesen von einem anderen Intervall abzuziehen, um die Differenz zu ermitteln. Nach

Definition der Differenz lassen sich die oben aufgestellten Terme wie folgt expandieren:

$$(\Delta_{(s,t)} \setminus \emptyset) = (\Delta_{(s,t)} \setminus^{*} (\Delta_{(s,t)} \cap \emptyset))$$
und
$$(\emptyset \setminus \Delta_{(s,t)}) = (\emptyset \setminus^{*} (\emptyset \cap \Delta_{(s,t)}))$$

Infolge des undefinierten Schnitts ergibt sich dann:

$$(\Delta_{(s,t)} \setminus \emptyset) = (\Delta_{(s,t)} \setminus^{*} \emptyset)$$
und
$$(\emptyset \setminus \Delta_{(s,t)}) = (\emptyset \setminus^{*} \emptyset)$$

Auch hier gilt nun, dass genau wie die Überlappung zweier Intervalle unter Beteiligung von $\emptyset$ nicht zu ermitteln ist, auch deren Umkehrung, die Disjunktheit, nicht bestimmt werden kann ($F_B \preceq S_C \vee F_C \preceq S_B$ kann nicht gelöst werden). Damit ist die Bedingung für die Ermittlung einer regulären Differenz nicht erfüllt und das Resultat kann auch hier nur undefiniert sein. □

3.2.3 Before / After

Abbildung 3.2: Before / After Relation

Dieser Fall ist in unserem Kontext die einfachste Relation. Hier lässt sich mit keinem der Operatoren eine semantisch sinnvolle Kombination bilden:

$$(\Delta_{(s,t)} \cup \Delta_{(u,v)}) = \emptyset \qquad (\Delta_{(u,v)} \cup \Delta_{(s,t)}) = \emptyset$$
$$(\Delta_{(s,t)} \cap \Delta_{(u,v)}) = \emptyset \qquad (\Delta_{(u,v)} \cap \Delta_{(s,t)}) = \emptyset$$
$$(\Delta_{(s,t)} \setminus \Delta_{(u,v)}) = \emptyset \qquad (\Delta_{(u,v)} \setminus \Delta_{(s,t)}) = \emptyset$$

Beweis. Nach Definition der Vereinigung beginnt diese mit dem Startzeitpunkt des früheren Intervalls und endet mit dem Ende des späteren. Damit gilt hier, dass die

Vereinigung als Δ_C gebildet wird, für das, wenn es sich um ein reguläres Intervall handelt, gelten muss:

$$\begin{aligned} C &= (min(S_A, S_B), max(F_A, F_B)) \\ &= (min(s, u), max(t, v)) \\ &= (s, v) \end{aligned}$$

Betrachtet man jedoch die weitere Vorraussetzung, dass keine Lücke zwischen den zu vereinigenden Intervallen bestehen darf, so ist diese schon durch die Definition der Before / After Relation nicht erfüllt, wie aus Abbildung 3.2 leicht zu sehen ist. Formal ausgedrückt gilt für alle Zeitpunkte X mit $s \prec X \prec u$, dass diese nicht innerhalb der Ausgangsintervalle liegen, wohl aber innerhalb des oben genannten Resultats:

$$\begin{gathered} \exists X \in T \\ \text{mit} \\ X \succeq F_A \wedge X \preceq S_B \\ \text{und} \\ X \succeq min(S_A, S_B) \wedge X \preceq max(F_A, F_B) \end{gathered}$$

Damit kann das Ergebnis der Vereinigung hier nur undefiniert sein.

Da die beiden Intervalle disjunkt sind, kann es keinen gemeinsamen Schnitt dieser beiden geben. Es lässt sich also auf jeden Fall ein Zeitpunkt X finden mit $t \prec X \prec u$ (s.o.). Dies steht im Widerspruch zur Forderung für den Schnitt (mit eingesetzten Werten für S_A, S_B, F_A, F_B):

$$\begin{gathered} \exists X \in T \\ \text{mit} \\ s \prec X \wedge X \prec v \wedge \underbrace{u \prec X \wedge X \prec t}_{u \prec X \prec t} \end{gathered}$$

Damit lässt sich die Vorraussetzung für einen regulären Schnitt nicht erfüllen und dieser ist folglich undefiniert.

Für die Differenz der Intervalle betrachten wir wieder die expandierte Form der beiden möglichen Terme:

$$\begin{gathered} (\Delta_{(s,t)} \setminus \Delta_{(u,v)}) = (\Delta_{(s,t)} \setminus^* (\Delta_{(s,t)} \cap \Delta_{(u,v)})) \\ \text{und} \\ (\Delta_{(u,v)} \setminus \Delta_{(s,t)}) = (\Delta_{(s,t)} \setminus^* (\Delta_{(u,v)} \cap \Delta_{(s,t)})) \end{gathered}$$

Aus dem undefinierten Schnitt ergibt sich hier:

$$(\Delta_{(s,t)} \setminus \Delta_{(u,v)}) = (\Delta_{(s,t)} \setminus^* \emptyset)$$
und
$$(\Delta_{(u,v)} \setminus \Delta_{(s,t)}) = (\Delta_{(s,t)} \setminus^* \emptyset)$$

Diese Konstellation wurde bereits unter Abschnitt 3.2.2 behandelt. Mit derselben Argumentation kann also auch hier gefolgert werden, dass die Differenz der beiden Intervalle undefiniert sein muss. □

3.2.4 Equal

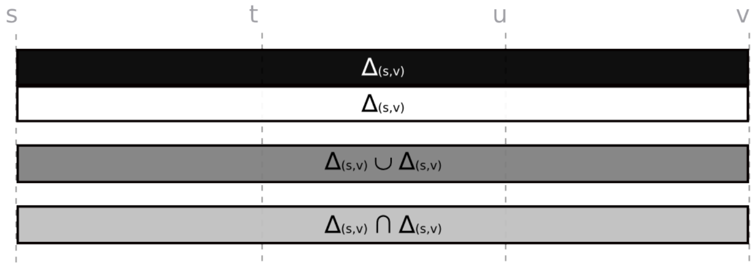

Abbildung 3.3: Equal Relation

Hier handelt es sich um eine Relation bei der die Regeln recht trivial zu erstellen und zu begründen sind. Abgesehen von der undefinierten Differenz erzeugt die Kombination zweier identischer Intervalle ein einziges Intervall, welches wiederum mit den ursprünglichen Intervallen identisch ist:

$$(\Delta_{(s,v)} \cup \Delta_{(s,v)}) = \Delta_{(s,v)}$$
$$(\Delta_{(s,v)} \cap \Delta_{(s,v)}) = \Delta_{(s,v)}$$
$$(\Delta_{(s,v)} \setminus \Delta_{(s,v)}) = \emptyset$$

Beweis. Für die Zeitpunkte des Starts und des Endes der beiden verknüpften Intervalle gilt, dass diese jeweils identisch sind ($S_A = S_B$ und $F_A = F_B$). Da das resultierende Intervall Δ_C der Vereinigung mit dem früheren Zeitpunkt beginnt und mit dem späteren endet ($C = (min(S_A, S_B), max(F_A, F_B))$), lässt sich einfach einsetzen:

$$\begin{aligned} C &= (min(S_A, S_A), max(F_A, F_A)) \\ &= (S_A, F_A) \\ &= (s, v) \end{aligned}$$

Damit ist das Resultat der Vereinigung gleich dem Ausgangsintervall, was man sich auch intuitiv klarmachen kann, wenn man bedenkt, dass beide verknüpften Intervalle exakt gleich sind und daher keines Informationen beinhalten kann, die nicht auch im anderen vorhanden sind. Die Voraussetzung, dass von der Vereinigung kein Zeitpunkt abgedeckt werden darf, der nicht von einem der beiden Ausgangsintervalle ebenfalls abgedeckt ist, ist damit auch erfüllt, da alle diese Intervalle ja identisch sind.

Ganz ähnlich erfolgt auch die Ermittlung des Schnittes der beiden Intervalle. Da diese sich vollständig überlappen, ist leicht zu sehen, dass ein Zeitpunkt X existiert, der innerhalb beider Intervalle liegt. Formal ist dies dadurch begründet, dass ein Intervall nicht längenlos sein darf ($S_A \prec F_A$). Wie oben festgestellt, sind die Grenzen beider Ausgangsintervalle jeweils identisch, weshalb nur ein Einziges von diesen betrachtet werden muss. Damit muss zur Ermittlung eines gültigen Schnittes ein Zeitpunkt X existieren mit $S_A \prec X \prec F_A$. Unter der Voraussetzung einer kontinuierlichen Zeitentwicklung ist dies jedoch definitionsgemäß immer der Fall – es kann also ein reguläres Intervall Δ_C für den Schnitt bestimmt werden. Auch hier kann der Zeitraum C wieder durch einfaches Einsetzen in die entsprechende Gleichung aus der Definition des Schnittes ermittelt werden. Der zu verwendende Fall ist Folgender:

$$C = (S_B, F_A), \text{wenn } S_A \preceq S_B \land F_A \preceq F_B$$

Unter Anwendung derselben Argumentation wie bei der Vereinigung ($S_A = S_B$ und $F_A = F_B$) folgt für den Schnitt der beiden Intervalle:

$$C = (S_A, F_A)$$

Dies ist wiederum intuitiv verständlich, da sich zwei identische Intervalle natürlich vollständig überlappen müssen, womit der Schnitt wiederum gleich den beiden Ausgangsintervallen ist.

Zieht man diese (vollständige) Überlappung von einem der Intervalle ab, so bleibt kein gültiges Intervall mehr als Resultat übrig. Dies ist leicht ersichtlich, wenn man die expandierte Form der Differenz bildet:

$$\begin{aligned}(\Delta_{(s,v)} \setminus \Delta_{(s,v)}) &= (\Delta_{(s,v)} \setminus^* (\Delta_{(s,v)} \cap \Delta_{(s,v)})) \\ &= (\Delta_{(s,v)} \setminus^* \Delta_{(s,v)})\end{aligned}$$

Für die Differenz muss nun ein Intervall Δ_C gefunden werden, das mit $\Delta_{(s,v)}$ disjunkt ist und für das gilt:

$$(\Delta_{(s,v)} \cup \Delta_C) = \Delta_{(s,v)}$$

Angenommen, es gäbe ein solches Intervall, dann muss hierfür gelten, dass dessen Grenzen nicht außerhalb von $\Delta_{(s,v)}$ liegen (nach Definition der Vereinigung) und dass die Bedingung der Disjunktheit erfüllt ist:

$$(s \preceq S_C \wedge F_C \preceq v) \wedge (v \preceq S_C \vee F_C \preceq s)$$

Unter Anwendung des Distributivgesetzes der Aussagenlogik folgt:

$$((s \preceq S_C \wedge F_C \preceq v) \wedge v \preceq S_C) \vee ((s \preceq S_C \wedge F_C \preceq v) \wedge F_C \preceq s)$$

Die Assoziativität der Konjunktion erlaubt ein Weglassen der inneren Klammern und eine kleine Umgruppierung. Hierdurch ist nun leicht ersichtlich, dass zur Erfüllung eines jeden der beiden Terme der Disjunktion für das Intervall Δ_C gelten muss, dass dessen Ende vor dem Startzeitpunkt liegt oder mit diesem identisch ist:

$$(s \preceq S_C \wedge \underbrace{F_C \preceq v \wedge v \preceq S_C}_{F_C \preceq S_C}) \vee (\underbrace{s \preceq S_C \wedge F_C \preceq s}_{F_C \preceq S_C} \wedge F_C \preceq v)$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zur Definition der Differenz, die verlangt, dass für alle beteiligten Intervalle der Startzeitpunkt strikt vor dem Endpunkt liegt (wie dies auch generell für alle betrachteten Intervalle gilt):

$$\begin{aligned} (\Delta_A \setminus^* \Delta_B) &= \Delta_C \\ &\text{mit} \\ \Delta_A, \Delta_B, \Delta_C &\in \{\Delta_x \mid x \in P\} \cup \emptyset \\ P &= \{(S,F) \mid S, F \in T \wedge S \prec F\} \end{aligned}$$

Dieser Widerspruch beweist, dass kein reguläres Intervall als Resultat gefunden werden kann, welches die Bedingungen der Differenz erfüllt, weshalb folglich die Regel gelten muss, dass die Differenz zweier identischer Intervalle undefiniert ist. □

3.2.5 Meets / Met-by

Bei der Meets / Met-by Relation sind der Endpunkt des früheren Intervalls und der Startzeitpunkt des Späteren identisch. Diese angrenzende Disjunktheit führt dazu, dass sich die Vereinigung recht einfach bilden lässt, der Schnitt jedoch undefiniert sein muss und damit auch keine Differenz möglich ist. Da aber im Gegensatz zur vorhergehend besprochenen Relation die Vereinigung hier nicht identisch mit einem der Ausgangsintervalle ist, wird eine zusätzliche Rechenvorschrift definiert, die bestimmt, wie diese zu bilden ist:

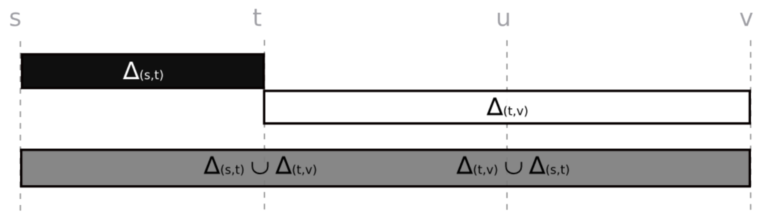

Abbildung 3.4: Meets / Met-by Relation

$$(\Delta_{(s,t)} \cup \Delta_{(t,v)}) = \Delta_{(s,v)} \qquad (\Delta_{(t,v)} \cup \Delta_{(s,t)}) = \Delta_{(s,v)}$$
$$(\Delta_{(s,t)} \cap \Delta_{(t,v)}) = \emptyset \qquad (\Delta_{(t,v)} \cap \Delta_{(s,t)}) = \emptyset$$
$$(\Delta_{(s,t)} \setminus \Delta_{(t,v)}) = \emptyset \qquad (\Delta_{(t,v)} \setminus \Delta_{(s,t)}) = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{(s,v)} &= (D^+_{(s,v)}, D^-_{(s,v)}) \\
&= (D^+_{(s,t)}, D^-_{(s,t)}) \cup (D^+_{(t,v)}, D^-_{(t,v)}) \\
&= (D^+_{(t,v)}, D^-_{(t,v)}) \cup (D^+_{(s,t)}, D^-_{(s,t)}) \\
D^+_{(s,v)} &= (D^+_{(s,t)} \cup D^+_{(t,v)}) \setminus (D^-_{(s,t)} \cup D^-_{(t,v)}) \\
D^-_{(s,v)} &= (D^-_{(s,t)} \cup D^-_{(t,v)}) \setminus (D^+_{(s,t)} \cup D^+_{(t,v)})
\end{aligned}$$

Beweis. Das Ergebnis Δ_C der Vereinigung der Intervalle wird wie oben ermittelt:

$$C = (min(S_A, S_B), max(F_A, F_B))$$

Unabhängig von der Reihenfolge der Operanden muss das Ergebnis bei dieser Relation daher $\Delta_{(s,v)}$ lauten:

$$\begin{aligned}
C &= (min(s,t), max(t,v)) \\
&= (min(t,s), max(v,t)) \\
&= (s,v)
\end{aligned}$$

Zu beachten ist an dieser Stelle noch die Forderung, dass das Ergebnisintervall auch tatsächlich von beiden Ausgangsintervallen vollständig abgedeckt wird. Da das Resultat keinen Zeitraum umfasst, der vor dem Zeitpunkt s oder nach dem Zeitpunkt v liegt, kann für einen möglicherweise außerhalb von $\Delta_{(s,t)}$ und $\Delta_{(t,v)}$ liegenden Zeitpunkt X nur gelten, dass dieser zwischen den beiden Ausgangsintervallen liegt. Je nach Reihenfolge der Operanden müsste also gelten $F_A \prec X \prec S_B$ ($\Delta_A = \Delta_{(s,t)}$) bzw. $F_B \prec X \prec S_A$ ($\Delta_A = \Delta_{(t,v)}$). Dies würde in beiden Fällen zu folgendem Term führen:

$$t \prec X \prec t$$

Daraus folgt allerdings, dass $t \prec t$ gelten müsste, was im Widerspruch zur Definition der Intervalle bzw. der distinkten Ordnung der Zeitpunkte steht. Damit kann es keinen Zeitpunkt innerhalb des Ergebnisses der Vereinigung geben, der außerhalb beider Ausgangsintervalle liegt. Es kann also die Vereinigung gebildet werden, wobei die oben genannte Rechenvorschrift an dieser Stelle ebenfalls zu beweisen bleibt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit und der Allgemeingültigkeit betrachten wir im Folgenden eine etwas verallgemeinerte Form dieser Vorschrift, bei der die genauen Grenzen der Intervalle außer acht gelassen werden (diese Form gilt selbstverständlich nur für die Equal Relation, also unter den oben besprochenen Umständen):

$$\begin{aligned}
\Delta_C &= (D_C^+, D_C^-) \\
&= \Delta_A \cup \Delta_B \\
&= (D_A^+, D_A^-) \cup (D_B^+, D_B^-) \\
D_C^+ &= (D_A^+ \cup D_B^+) \setminus (D_A^- \cup D_B^-) \\
D_C^- &= (D_A^- \cup D_B^-) \setminus (D_A^+ \cup D_B^+)
\end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass es sich bei den verschiedenen D um Mengen handelt. Die Operatoren in den unteren beiden Zeilen sind also als die bekannten Mengenoperatoren zu behandeln und dürfen nicht mit den Intervalloperatoren verwechselt werden. Zum Beweis der Korrektheit dieser Rechenvorschrift betrachten wir nun sämtliche Möglichkeiten des Vorkommens eines beliebigen Elementes φ eines Zustandes innerhalb der betrachteten Intervalle. Für jedes einzelne Intervall gilt hierbei, dass ein Element zwischen dessen Start und Ende entweder hinzugefügt ($\varphi \in D^+$), entfernt ($\varphi \in D^-$) oder unverändert gelassen wird ($\varphi \notin (D^+ \cup D^-)$)[2]. Der Übersicht halber werden in der weiteren Betrachtung für diese drei Fälle folgende Symbole verwendet:

1. Element hinzugefügt: $+$
2. Element entfernt: $-$
3. Element unverändert: $*$

Bei der Vereinigung zweier Intervalle ergeben sich damit insgesamt neun mögliche Kombinationen (3^2), wobei das doppelte Hinzufügen bzw. Entfernen nicht vorkommen kann, da ein Weltzustand bekanntlich eine Menge ist und jedes Element darin nur einmal vorhanden sein kann. Damit hätte in diesen Fällen die zweite Veränderung keine Auswirkungen mehr auf den resultierenden Zustand, womit das entsprechende

[2] $\varphi \in (D^+ \cap D^-)$ ist per Definition ausgeschlossen.

Intervall equivalent zu dem wird, das das betreffende Element unverändert lässt, was in diesem Fall die korrekte Kombination ergibt. Die Tabelle 3.1 listet sämtliche Kombinationen mit den semantisch korrekten Ergebnissen der Vereinigung bezüglich des Elementes φ auf. Nachfolgend wird nun für alle sieben gültigen Kombinationen die Be-

Δ_A	Δ_B	Δ_C
$+$	$*$	$+$
$*$	$+$	$+$
$-$	$*$	$-$
$*$	$-$	$-$
$+$	$-$	$*$
$-$	$+$	$*$
$*$	$*$	$*$

Nicht vorkommende Kombinationen:

Δ_A	Δ_B	Δ_C
$+$	$+$	
$-$	$-$	

Tabelle 3.1: Mögliche Kombinationen von Veränderungen bezüglich eines Elementes φ eines Weltzustandes.

rechnungsvorschrift für Δ_C auf ihre Korrektheit überprüft, wobei Kombinationen, die sich lediglich in der Reihenfolge unterscheiden, zusammengefasst behandelt werden:

1. φ wird hinzugefügt und unverändert gelassen ($+*$ und $*+$):
   Je nach Reihenfolge gilt in diesem Fall, dass $\varphi \in D_A^+$ oder $\varphi \in D_B^+$. Da φ im anderen Intervall unverändert bleibt, gilt ebenfalls, dass $\varphi \notin D_A^-$ und $\varphi \notin D_B^-$. Daraus ergibt sich unter Anwendung der Rechenvorschrift folgende Betrachtung für Δ_C:

$$\begin{aligned} &\varphi \in (D_A^+ \cup D_B^+) \\ &\varphi \notin (D_A^- \cup D_B^-) \\ \Rightarrow\ &\varphi \in (D_A^+ \cup D_B^+) \setminus (D_A^- \cup D_B^-) \\ \wedge\ &\varphi \notin (D_A^- \cup D_B^-) \setminus (D_A^+ \cup D_B^+) \\ &\varphi \in D_C^+ \wedge \varphi \notin D_C^- \end{aligned}$$

   Die Rechenvorschrift führt dazu, dass in der Vereinigung das Element φ korrekt hinzugefügt wird.

2. φ wird entfernt und unverändert gelassen ($-*$ und $*-$):
   Die Behandlung dieses Falles erfolgt weitgehend analog zum Vorhergehenden. Hier gilt genau umgekehrt: $\varphi \in D_A^-$ oder $\varphi \in D_B^-$ sowie $\varphi \notin D_A^+$ und $\varphi \notin D_B^+$.

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\varphi \in (D_A^- \cup D_B^-) \\ &\varphi \notin (D_A^+ \cup D_B^+) \\ \Rightarrow &\varphi \in (D_A^- \cup D_B^-) \setminus (D_A^+ \cup D_B^+) \\ \wedge &\varphi \notin (D_A^+ \cup D_B^+) \setminus (D_A^- \cup D_B^-) \\ &\varphi \in D_C^- \wedge \varphi \notin D_C^+ \end{aligned}$$

In der Vereinigung wird φ also korrekt entfernt.

3. φ wird hinzugefügt und entfernt ($+-$ und $-+$):
In diesem Fall wird das Element entweder im ersten Intervall hinzugefügt und im Zweiten wieder entfernt, oder es ist zu Beginn des ersten Intervalls bereits vorhanden, wird in diesem dann entfernt und im zweiten Intervall wieder hinzugefügt. Bei beiden Varianten gilt, dass nach dem zweiten Intervall der Zustand bezüglich φ identisch mit dem Ausgangszustand ist, also in der Vereinigung beider Intervalle keine Veränderung von φ vorkommen darf. Je nach Reihenfolge der einzelnen Veränderungen gilt also hier: $\varphi \in D_A^+ \wedge \varphi \in D_B^-$ oder $\varphi \in D_A^- \wedge \varphi \in D_B^+$. Unter diesen Umständen ergibt die Anwendung der Rechenvorschrift dann folgende Betrachtung:

$$\begin{aligned} &\varphi \in (D_A^+ \cup D_B^+) \\ &\varphi \in (D_A^- \cup D_B^-) \\ \Rightarrow &\varphi \notin (D_A^+ \cup D_B^+) \setminus (D_A^- \cup D_B^-) \\ \wedge &\varphi \notin (D_A^- \cup D_B^-) \setminus (D_A^+ \cup D_B^+) \\ &\varphi \notin D_C^+ \wedge \varphi \notin D_C^- \end{aligned}$$

Wenn also ein Element sowohl hinzugefügt als auch entfernt wird, ergibt sich für das Resultat der Vereinigung keine Veränderung bezüglich dieses Elementes. Die Rechenvorschrift ist also auch in diesem Fall korrekt.

4. φ wird komplett unverändert gelassen ($**$):
Dieser Fall schließlich ist trivial, da das Element φ in keinem der beiden Intervalle auftaucht und somit auch nicht in der Vereinigung zu finden ist ($\varphi \notin D_A^+ \wedge \varphi \notin D_A^- \wedge \varphi \notin D_B^+ \wedge \varphi \notin D_B^-$):

$$\begin{aligned} &\varphi \notin (D_A^+ \cup D_B^+) \\ &\varphi \notin (D_A^- \cup D_B^-) \\ \Rightarrow &\varphi \notin (D_A^+ \cup D_B^+) \setminus (D_A^- \cup D_B^-) \\ \wedge &\varphi \notin (D_A^- \cup D_B^-) \setminus (D_A^+ \cup D_B^+) \\ &\varphi \notin D_C^+ \wedge \varphi \notin D_C^- \end{aligned}$$

Die oben aufgestellte Berechnungsvorschrift liefert also für alle möglichen Kombinationen von Veränderungen bezüglich eines bestimmten Elementes eines Zustandes die korrekte Vereinigung von zwei Intervallen und ist damit gültig.

Für den Schnitt ist leicht zu sehen, dass es keinen Zeitraum gibt, in dem sich die Intervalle überlappen. Formal lässt sich diese Tatsache ebenso einfach anhand der Forderung für den Schnitt belegen:

$$\exists X \in T$$
$$\text{mit}$$
$$S_A \prec X \wedge S_B \prec X \wedge X \prec F_A \wedge X \prec F_B$$

Aus dem Teilterm $S_A \prec X \wedge S_B \prec X$ folgt, dass für einen solchen Zeitpunkt X, der innerhalb der Überlappung beider Intervalle liegt, gelten muss: $X \succ t$. Daraus folgt jedoch $\neg(X \prec F_A)$, womit der gesamte Term nicht mehr erfüllbar ist. Daher gibt es keine Überlappung zwischen den Intervallen und der Schnitt ist folglich undefiniert.

Aufgrund des undefinierten Schnitts ist auch, wie in den Abschnitten 3.2.2 und 3.2.3 bereits ausgeführt, die Differenz nicht sinnvoll zu bilden. □

3.2.6 Starts / Started-by

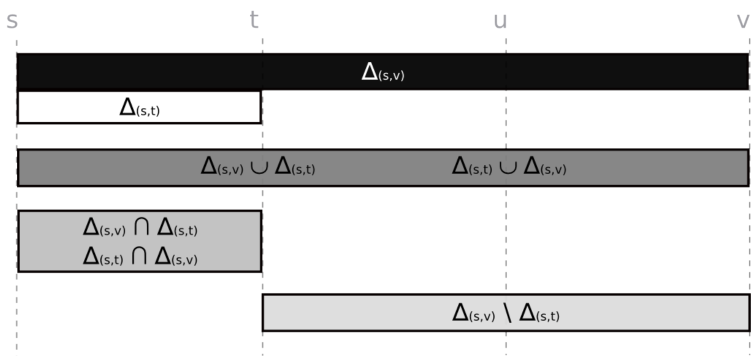

Abbildung 3.5: Starts / Started-by Relation

Bei dieser Relation wird ein Intervall vollständig vom anderen überlappt, während der Anfangszeitpunkt bei beiden identisch ist. Daraus ergeben sich wiederum triviale Regeln für die Vereinigung und den Schnitt und zusätzlich dazu lässt sich in diesem Fall auch sinnvoll eine Differenz bilden (dabei kann allerdings lediglich das kleinere Intervall vom Größeren abgezogen werden). Bei dieser Differenz ist wiederum eine zusätzliche Rechenvorschrift notwendig:

$$
\begin{aligned}
(\Delta_{(s,t)} \cup \Delta_{(s,v)}) &= \Delta_{(s,v)} & \qquad (\Delta_{(s,v)} \cup \Delta_{(s,t)}) &= \Delta_{(s,v)} \\
(\Delta_{(s,t)} \cap \Delta_{(s,v)}) &= \Delta_{(s,t)} & \qquad (\Delta_{(s,v)} \cap \Delta_{(s,t)}) &= \Delta_{(s,t)} \\
(\Delta_{(s,t)} \setminus \Delta_{(s,v)}) &= \emptyset & \qquad (\Delta_{(s,v)} \setminus \Delta_{(s,t)}) &= \Delta_{(t,v)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_{(t,v)} &= (D^+_{(t,v)}, D^-_{(t,v)}) \\
&= (D^+_{(s,v)}, D^-_{(s,v)}) \setminus^* (D^+_{(s,t)}, D^-_{(s,t)}) \\
D^+_{(t,v)} &= (D^+_{(s,v)} \setminus D^+_{(s,t)}) \cup (D^-_{(s,t)} \setminus D^-_{(s,v)}) \\
D^-_{(t,v)} &= (D^-_{(s,v)} \setminus D^-_{(s,t)}) \cup (D^+_{(s,t)} \setminus D^+_{(s,v)})
\end{aligned}
$$

Beweis. Für die Vereinigung gilt definitionsgemäß, dass das resultierende Intervall zum Startzeitpunkt des Früheren beginnen und zum Endpunkt des Späteren enden muss. Im Falle dieser Relation gilt, dass der Startzeitpunkt s bei beiden Intervallen identisch ist, während eines der Intervalle kürzer ist als das andere. Daraus folgt, dass das kürzere Intervall vollständig vom anderen überlappt wird (für den Endpunkt t des kürzeren gilt: $t \prec v$). Damit gilt für das Ergebnis Δ_C der Vereinigung:

$$
\begin{aligned}
C &= (min(s,s), max(t,v)) \\
C &= (s,v)
\end{aligned}
$$

Damit ist die Vereinigung gleich dem größeren Intervall $\Delta_{(s,v)}$. Auch hier gilt, dass die Bedingung, dass es keinen Zeitpunkt innerhalb der Vereinigung geben darf, der nicht innerhalb eines der Ausgangsintervalle liegt, erfüllt ist: Da das Resultat mit einem der Ausgangsintervalle identisch ist, sind alle Zeitpunkte innerhalb der Vereinigung auch von diesem Ausgangsintervall abgedeckt.

Der Schnitt beider Intervalle ist laut Definition gleich der Überlappung beider Intervalle. Wie im vorhergehenden Absatz festgestellt, wird das kürzere Intervall vollständig vom Längeren überlappt. Somit ist also die bekannte Forderung nach dem Zeitpunkt X, an dem sich beide Intervalle überlappen, für alle Zeitpunkte erfüllt, für die gilt: $s \prec X \prec t$. Für das Resultat Δ_C gilt hier also für $(\Delta_{(s,t)} \cap \Delta_{(s,v)})$ der Fall:

$$C = (S_B, F_A), \text{wenn } S_A \preceq S_B \wedge F_A \preceq F_B$$

Für $(\Delta_{(s,v)} \cap \Delta_{(s,t)})$ gilt dagegen:

$$C = (S_B, F_B), \text{wenn } S_A \preceq S_B \wedge F_B \prec F_A$$

Durch Einsetzen kommt man allerdings in beiden Fällen zu demselben Ergebnis:

$$\begin{aligned} C &= (S_B, F_A) \text{ für } S_B = s, F_A = t \\ &= (s,t) \\ &\text{und} \\ C &= (S_B, F_B) \text{ für } S_B = s, F_B = t \\ &= (s,t) \end{aligned}$$

Damit entspricht in beiden Fällen das Ergebnis des Schnitts dem kürzeren Intervall $\Delta_{(s,t)}$.

Die Differenz schließlich zieht genau diese Überlappung vom ersten Intervall ab. Für den Fall, dass dieses das Kürzere ist, ergibt sich für die expandierte Form:

$$(\Delta_{(s,t)} \setminus \Delta_{(s,v)}) = (\Delta_{(s,t)} \setminus^* (\Delta_{(s,t)} \cap \Delta_{(s,v)}))$$

Hier lässt sich die Regel $(\Delta_{(s,t)} \cap \Delta_{(s,v)}) = \Delta_{(s,t)}$ für den Schnitt anwenden, so dass also gilt:

$$(\Delta_{(s,t)} \setminus \Delta_{(s,v)}) = (\Delta_{(s,t)} \setminus^* \Delta_{(s,t)})$$

Für eine solche Differenz zweier identischer Intervalle wurde bereits in Abschnitt 3.2.4 gezeigt, dass das Ergebnis undefiniert sein muss. Anders verhält es sich jedoch, wenn das kürzere Intervall vom Längeren abgezogen wird:

$$\begin{aligned} (\Delta_{(s,v)} \setminus \Delta_{(s,t)}) &= (\Delta_{(s,v)} \setminus^* (\Delta_{(s,v)} \cap \Delta_{(s,t)})) \\ &= (\Delta_{(s,v)} \setminus^* \Delta_{(s,t)}) \end{aligned}$$

Nach Definition der Differenz gilt nun, dass das Ergebnis folgende Eigenschaften aufweisen muss:

$$\begin{gathered} (\Delta_A \setminus^* \Delta_B) = \Delta_C \\ \text{so dass } \Delta_B, \Delta_C \text{ disjunkt sind und} \\ (\Delta_B \cup \Delta_C) = \Delta_A \end{gathered}$$

Es muss also ein Δ_C gefunden werden, welches mit $\Delta_{(s,t)}$ disjunkt ist und für das gilt:

$$(\Delta_{(s,t)} \cup \Delta_C) = \Delta_{(s,v)}$$

Wie aus dem vorhergehenden Abschnitt 3.2.5 hervorgeht, gilt dies genau für $\Delta_{(t,v)}$, für welches auch die Vereinigung berechenbar ist. Damit bleibt noch zu beweisen, dass die oben angegebene Berechnungsvorschrift für die Differenz genau dieses Intervall erzeugt, dessen Vereinigung mit $\Delta_{(s,t)}$ wiederum $\Delta_{(s,v)}$ ergibt. Zu diesem Zweck werden wir nachfolgend einfach die Berechnungsvorschrift für die Differenz in diejenige für die Vereinigung einsetzen. Da Letztere bereits bewiesen ist, muss Erstere ebenfalls korrekt sein, falls sich auf diese Weise eine wahre Aussage ableiten lässt. Einige Vorraussetzungen sind dabei allerdings zu beachten: Nach Definition der Intervalle sind die Mengen $D^+_{(s,t)}$ und $D^-_{(s,t)}$ disjunkt. Ebenso gilt dies für die Mengen $D^+_{(s,v)}$ und $D^-_{(s,v)}$. Darüberhinaus gilt, wenn ein Element φ im Zeitraum (s,t) hinzugefügt wird ($\varphi \in D^+_{(s,t)}$), dann war es zum Zeitpunkt s noch nicht vorhanden. Damit kann es im Zeitraum (s,v) nicht entfernt werden (sollte es im Zeitraum (t,v) entfernt werden, so bleibt es insgesamt in (s,v) unverändert – vgl. Abschnitt 3.2.5). Damit gilt $\varphi \in D^+_{(s,t)} \Rightarrow \varphi \notin D^-_{(s,v)}$, diese beiden Mengen sind also ebenfalls disjunkt. Mit derselben Argumentation gilt auch, dass ein Element φ, welches im Zeitraum (s,t) entfernt wird, bereits vorhanden gewesen sein muss und damit nicht mehr zusätzlich im Zeitraum (s,v) hinzugefügt werden kann. Damit sind auch die Mengen $D^+_{(s,v)}$ und $D^-_{(s,t)}$ disjunkt.

Um die Übersicht zu vereinfachen werden in den nachfolgenden Formeln die oben genannten Mengenbezeichnungen durch leichter voneinander zu unterscheidende Buchstaben ersetzt:

$$\begin{aligned} D^+_{(s,t)} &= M \\ D^-_{(s,t)} &= N \\ D^+_{(s,v)} &= O \\ D^-_{(s,v)} &= P \end{aligned}$$

Für die genannten Vorraussetzungen (Disjunktheit) gilt hierbei:

$$\begin{aligned} M \cap N &= \emptyset \\ M \cap P &= \emptyset \\ N \cap O &= \emptyset \\ O \cap P &= \emptyset \end{aligned}$$

Nach der Berechnungsvorschrift für die Vereinigung gilt also nun:

$$\begin{aligned} O &= (M \cup D^+_{(t,v)}) \setminus (N \cup D^-_{(t,v)}) \\ P &= (N \cup D^-_{(t,v)}) \setminus (M \cup D^+_{(t,v)}) \end{aligned}$$

Ersetzt man nun entsprechend der Obigen Benennung die Namen der Mengen in der Rechenvorschrift für die Differenz, so erhält man folgende Gleichungen, die in die Obigen eingesetzt werden können:

$$D^{+}_{(t,v)} = (O \setminus M) \cup (N \setminus P)$$
$$D^{-}_{(t,v)} = (P \setminus N) \cup (M \setminus O)$$

Eingesetzt:

$$O = (M \cup (O \setminus M) \cup (N \setminus P)) \setminus (N \cup (P \setminus N) \cup (M \setminus O))$$
$$P = (N \cup (P \setminus N) \cup (M \setminus O)) \setminus (M \cup (O \setminus M) \cup (N \setminus P))$$

Nachfolgend werden beide Gleichungen nacheinander umgeformt. Hierbei ergibt sich für erstere:

$$\begin{aligned}
O &= (M \cup (O \setminus M) \cup (N \setminus P)) \setminus (N \cup (P \setminus N) \cup (M \setminus O)) \\
&= (M \cup O \cup (N \setminus P)) \setminus (N \cup P \cup (M \setminus O)) \\
&\text{nach Distributivgesetz der Differenzmenge:} \\
&= \underbrace{((M \cup O) \setminus (N \cup P \cup (M \setminus O)))}_{Q} \cup \underbrace{((N \setminus P) \setminus (N \cup P \cup (M \setminus O)))}_{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q &= (M \cup O) \setminus (N \cup P \cup (M \setminus O)) \\
&\text{nach Distributivgesetz der Differenzmenge:} \\
&= ((M \cup O) \setminus (N \cup P)) \cap ((M \cup O) \setminus (M \setminus O))) \\
&= ((M \cup O) \setminus (N \cup P)) \cap O \\
&\text{nach Disjunktheitsannahme:} \\
&= (M \cup O) \cap O \\
&= O
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R &= (N \setminus P) \setminus (N \cup P \cup (M \setminus O)) \\
&\text{nach Distributivgesetz der Differenzmenge:} \\
&= ((N \setminus P) \setminus (N \cup P)) \cap ((N \setminus P) \setminus (M \setminus O)) \\
&= \emptyset \cap ((N \setminus P) \setminus (M \setminus O)) \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O &= Q \cup R \\
&= O \cup \emptyset \\
O &= O
\end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
P &= (N \cup (P \setminus N) \cup (M \setminus O)) \setminus (M \cup (O \setminus M) \cup (N \setminus P)) \\
&= (N \cup P \cup (M \setminus O)) \setminus (M \cup O \cup (N \setminus P)) \\
&\text{nach Distributivgesetz der Differenzmenge:} \\
&= \underbrace{((N \cup P) \setminus (M \cup O \cup (N \setminus P)))}_{S} \cup \underbrace{((M \setminus O) \setminus (M \cup O \cup (N \setminus P)))}_{T}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &= (N \cup P) \setminus (M \cup O \cup (N \setminus P)) \\
&\text{nach Distributivgesetz der Differenzmenge:} \\
&= ((N \cup P) \setminus (M \cup O)) \cap ((N \cup P) \setminus (N \setminus P)) \\
&= ((N \cup P) \setminus (M \cup O)) \cap P \\
&\text{nach Disjunktheitsannahme:} \\
&= (N \cup P) \cap P \\
&= P
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T &= (M \setminus O) \setminus (M \cup O \cup (N \setminus P)) \\
&\text{nach Distributivgesetz der Differenzmenge:} \\
&= (M \setminus O) \setminus (M \cup O) \cap (M \setminus O) \setminus (N \setminus P)) \\
&= \emptyset \cap (M \setminus O) \setminus (N \setminus P)) \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P &= S \cup T \\
&= P \cup \emptyset \\
P &= P
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich für beide Einzelmengen jeweils eine wahre Aussage und die Berechnungsvorschrift ist folglich semantisch korrekt. □

3.2.7 Finishes / Finished-by

Diese Relation kann analog zur vorhergehenden Starts / Started-by Relation betrachtet werden (vgl. Abschnitt 3.2.6). Anstelle des Startzeitpunkts ist hier der Endpunkt bei beiden Intervallen identisch. Daraus ergeben sich folgende Regeln:

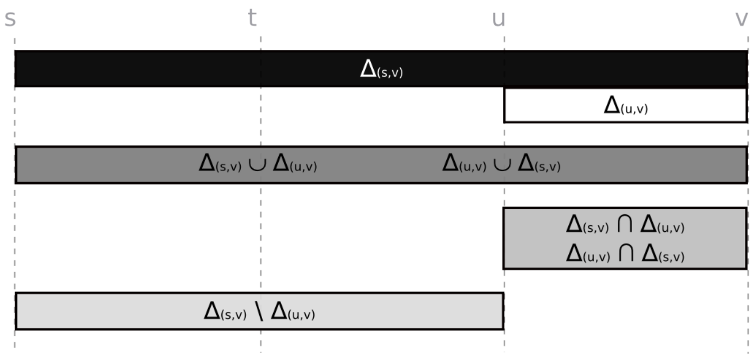

Abbildung 3.6: Finishes / Finished-by Relation

$$
\begin{aligned}
(\Delta_{(u,v)} \cup \Delta_{(s,v)}) &= \Delta_{(s,v)} & \qquad (\Delta_{(s,v)} \cup \Delta_{(u,v)}) &= \Delta_{(s,v)} \\
(\Delta_{(u,v)} \cap \Delta_{(s,v)}) &= \Delta_{(u,v)} & \qquad (\Delta_{(s,v)} \cap \Delta_{(u,v)}) &= \Delta_{(u,v)} \\
(\Delta_{(u,v)} \setminus \Delta_{(s,v)}) &= \emptyset & \qquad (\Delta_{(s,v)} \setminus \Delta_{(u,v)}) &= \Delta_{(s,u)}
\end{aligned}
$$

An dieser Stelle wird ebenfalls eine Berechnungsvorschrift für die Differenz angegeben, die analog zur vorhergehend besprochenen Vorschrift beschaffen ist:

$$
\begin{aligned}
\Delta_{(s,u)} &= (D^+_{(s,u)}, D^-_{(s,u)}) \\
&= (D^+_{(s,v)}, D^-_{(s,v)}) \setminus^* (D^+_{(u,v)}, D^-_{(u,v)}) \\
D^+_{(s,u)} &= (D^+_{(s,v)} \setminus D^+_{(u,v)}) \cup (D^-_{(u,v)} \setminus D^-_{(s,v)}) \\
D^-_{(s,u)} &= (D^-_{(s,v)} \setminus D^-_{(u,v)}) \cup (D^+_{(u,v)} \setminus D^+_{(s,v)})
\end{aligned}
$$

Beweis. Die Beweise für Vereinigung, Schnitt und Differenz können komplett analog zu Abschnitt 3.2.6 erfolgen, da hier, wie gesagt, lediglich die Endpunkte der Intervalle anstelle ihrer Startzeitpunkte identisch sind. Damit kann dieselbe Argumentation verwendet werden, wie im vorhergehenden Abschnitt, und an dieser Stelle ist keine wiederholte Ausführung erforderlich.

Da bei der Berechnungsvorschrift für die Differenz im Vergleich zur oben ausführlich Besprochenen lediglich einige Mengen ersetzt wurden ($D^+_{(s,t)}$ durch $D^+_{(u,v)}$, $D^-_{(s,t)}$ durch $D^-_{(u,v)}$, $D^+_{(t,v)}$ durch $D^+_{(s,u)}$ und $D^-_{(t,v)}$ durch $D^-_{(s,u)}$), kann der Beweis aus Abschnitt 3.2.6 hier ebenfalls analog angewendet werden und bedarf keiner weiteren Ausführung. $\square$

3.2.8 During / Contains

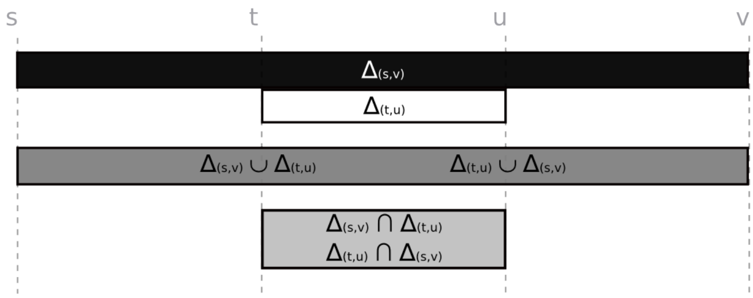

Abbildung 3.7: During / Contains Relation

Dieser Fall ähnelt den beiden Vorhergehenden, allerdings gibt es hier keine gemeinsamen Grenzen der Intervalle. Das größere Intervall beginnt also vor dem Kleineren und endet nach diesem. Für die Vereinigung und den Schnitt ergeben sich damit keine Änderungen zu den Relationen aus Abschnitt 3.2.6 und 3.2.7. Die Differenz ist hier jedoch nicht mehr zu bilden:

$$
\begin{aligned}
(\Delta_{(t,u)} \cup \Delta_{(s,v)}) &= \Delta_{(s,v)} & \qquad (\Delta_{(s,v)} \cup \Delta_{(t,u)}) &= \Delta_{(s,v)} \\
(\Delta_{(t,u)} \cap \Delta_{(s,v)}) &= \Delta_{(t,u)} & \qquad (\Delta_{(s,v)} \cap \Delta_{(t,u)}) &= \Delta_{(t,u)} \\
(\Delta_{(t,u)} \setminus \Delta_{(s,v)}) &= \emptyset & \qquad (\Delta_{(s,v)} \setminus \Delta_{(t,u)}) &= \emptyset
\end{aligned}
$$

Beweis. Aufgrund der Tatsache, dass hier ein Intervall das andere vollständig überlappt, wobei das Größere sowohl vor dem Kleineren beginnt als auch nach diesem endet, ergibt sich für die Grenzen der Vereinigung Δ_C:

$$
\begin{aligned}
C &= (min(S_A, S_B), max(F_A, F_B)) \\
&= (min(S_B, S_A), max(F_B, F_A)) \\
&= (min(s, t), max(v, u)) \\
&= (min(t, s), max(u, v)) \\
&= (s, v)
\end{aligned}
$$

Damit entspricht hier das Ergebnis dem Größeren der beiden Ausgangsintervalle. Wie oben bereits ausgeführt, ist somit auch die Bedingung erfüllt, dass es keinen Zeitpunkt gibt, der innerhalb der Vereinigung liegt, aber nicht von mindestens einem Ausgangsintervall abgedeckt wird.

Die Bedingung für den Schnitt, dass sich beide Intervalle überlappen, ist, wie bereits genannt, ebenfalls erfüllt. Je nach Reihenfolge der Operanden gilt hier:

$$\begin{gathered} S_A \prec S_B \wedge F_B \prec F_A \\ \text{oder} \\ S_A \succ S_B \wedge F_B \succ F_A \end{gathered}$$

In jedem Fall ergibt sich in Kombination mit der Tatsache, dass ein Intervall nicht längenlos sein darf, dass für alle Zeitpunkte des kürzeren Intervalls die Überlappungsbedingung erfüllt ist. Damit kann ein Δ_C als Resultat bestimmt werden, wobei hier wiederum je nach Reihenfolge folgende Fälle berücksichtigt werden müssen, die jedoch beide dasselbe Ergebnis produzieren:

$$\begin{aligned} C &= \begin{cases} (S_B, F_B), \text{wenn } S_A \preceq S_B \wedge F_B \prec F_A \\ (S_A, F_A), \text{wenn } S_B \prec S_A \wedge F_A \preceq F_B \end{cases} \\ &= (t, u) \end{aligned}$$

Der Schnitt beider Intervalle ist also genau gleich dem kürzeren Intervall.

Für die Differenz schließlich lassen sich wieder die expandierten Formen aufstellen:

$$\begin{aligned} (\Delta_{(t,u)} \setminus \Delta_{(s,v)}) &= (\Delta_{(t,u)} \setminus^* (\Delta_{(t,u)} \cap \Delta_{(s,v)})) \\ &= (\Delta_{(t,u)} \setminus^* \Delta_{(t,u)}) \\ &\text{und} \\ (\Delta_{(s,v)} \setminus \Delta_{(t,u)}) &= (\Delta_{(s,v)} \setminus^* (\Delta_{(s,v)} \cap \Delta_{(t,u)})) \\ &= (\Delta_{(s,v)} \setminus^* \Delta_{(t,u)}) \end{aligned}$$

In ersterem Fall muss entsprechend der Betrachtung in Abschnitt 3.2.4 das Ergebnis undefiniert sein. Für den zweiten Fall muss nun, um ein reguläres Intervall als Differenz zu erhalten, ein mit $\Delta_{(t,u)}$ disjunktes Intervall gefunden werden, für das gilt:

$$(\Delta_{(t,u)} \cup \Delta_C) = \Delta_{(s,v)}$$

Entsprechend der Bedingung zur Disjunktheit muss also für die Grenzen von Δ_C gelten:

$$u \preceq S_C \vee F_C \preceq t$$

Aufgrund der Tatsache, dass nach Definition der Intervalle der Startzeitpunkt strikt vor dem Ende liegen muss ($S_C \prec F_C$), kann oben nicht der Fall auftreten, dass beide Teilterme des Oders erfüllt sind (es ist also ein exklusives Oder). Damit haben wir genau zwei Möglichkeiten, die Vereinigung zu bilden.

1. Δ_C beginnt zu Zeitpunkt u ($u \preceq S_C$)[3]:
   In diesem Fall endet die Vereinigung mit dem Ende von Δ_C, welches wir hier nicht weiter beachten, beginnt jedoch zwangsläufig zum Zeitpunkt t ($min(t, u) = t$). Damit kann das Ergebnis nicht $\Delta_{(s,v)}$ lauten und alle Δ_C, die wir mit diesem Fall konstruieren können, stellen keine gültige Differenz für die beiden Ausgangsintervalle dar.
2. Δ_C endet an Zeitpunkt t ($F_C \preceq t$):
   Hier kann analog zum vorhergehenden Fall argumentiert werden, dass die Vereinigung der beiden Intervalle mit dem Zeitpunkt u enden muss. Damit kann auch auf diese Weise kein Intervall konstruiert werden, das eine gültige Differenz darstellt.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich, dass eine reguläre Differenz bei dieser Relation der Intervalle nicht gebildet werden kann und diese somit undefiniert ist. □

3.2.9 Overlaps / Overlapped-by

Abbildung 3.8: Overlaps / Overlapped-by Relation

Bei dieser Relation schließlich existiert eine partielle Überlappung der beiden Intervalle. Das Frühere beginnt damit vor dem Späteren und endet, nachdem das Spätere bereits begonnen hat. Das spätere Intervall endet dabei nach dem Früheren.

Diese Relation ist die Komplizierteste von allen, da es weder gemeinsame Grenzen noch vollständige Überlappungen gibt. Aus diesem Grunde kann auch keine der drei Operationen ein sinnvolles Ergebnis liefern:

$$\begin{aligned} (\Delta_{(s,u)} \cup \Delta_{(t,v)}) &= \emptyset \qquad & (\Delta_{(t,v)} \cup \Delta_{(s,u)}) &= \emptyset \\ (\Delta_{(s,u)} \cap \Delta_{(t,v)}) &= \emptyset \qquad & (\Delta_{(t,v)} \cap \Delta_{(s,u)}) &= \emptyset \\ (\Delta_{(s,u)} \setminus \Delta_{(t,v)}) &= \emptyset \qquad & (\Delta_{(t,v)} \setminus \Delta_{(s,u)}) &= \emptyset \end{aligned}$$

[3] Die Möglichkeit, dass Beginn des einen und Ende des anderen der Intervalle für die Vereinigung nicht aufeinanderfallen, lassen wir hier außer acht, da sich die Vereinigung in diesem Fall ohnehin nicht regulär bilden lässt (vgl. Abschnitt 3.2.3).

Beweis. Für die Vereinigung gilt generell, dass ein mögliches reguläres Intervall als Ergebnis mit dem früheren Startzeitpunkt der beiden Ausgangsintervalle beginnen und mit dem späteren Ende abschließen muss, wie bereits mehrfach dargelegt. Damit ergibt sich in diesem Fall für ein angenommenes Ergebnis Δ_C:

$$\begin{aligned} C &= (min(S_A, S_B), max(F_A, F_B)) \\ &= (min(S_B, S_A), max(F_B, F_A)) \\ &= (min(s,t), max(u,v)) \\ &= (min(t,s), max(v,u)) \\ &= (s,v) \end{aligned}$$

Die Bedingung, dass innerhalb dieses Resultats kein Zeitpunkt existieren darf, der nicht von einem der Ausgangsintervalle abgedeckt wird, ist ebenfalls erfüllt. Aufgrund der Tatsache, dass hier je nach Reihenfolge der Operanden gilt $F_A \succ S_B$ (für $\Delta_{(s,u)} \cup \Delta_{(t,v)}$) bzw. $S_A \prec F_B$ (für $\Delta_{(t,v)} \cup \Delta_{(s,u)}$), kann es zwischen den beiden Ausgangsintervallen keine Lücke geben – dies entspricht gerade der Definition dieser Relation. Da allerdings das resultierende Intervall $\Delta_{(s,v)}$ mit keinem der Ausgangsintervalle identisch ist, muss eine Berechnungsvorschrift gefunden werden, die dessen Erzeugung ermöglicht. Dies ist jedoch nicht möglich, wie die folgende Ausführung zeigt:

Um zu zeigen, dass es keine Berechnungsvorschrift für die Vereinigung zweier sich partiell überlappender Intervalle geben kann, genügt es, ein einzelnes Beispiel zu finden, welches sich nicht berechnen lässt. Zu diesem Zweck betrachten wir wieder die Änderungen innerhalb zweier angenommener Intervalle bezüglich eines Elementes φ der Welt. Nehmen wir an, φ wird in Intervall $\Delta_{(s,u)}$ hinzugefügt[4] und im Intervall $\Delta_{(t,v)}$ unverändert gelassen. Damit gilt:

$$\begin{aligned} &\varphi \in D^+_{(s,u)} \\ &\varphi \notin (D^-_{(s,u)} \cup D^+_{(t,v)} \cup D^-_{(t,v)}) \end{aligned}$$

Teilen wir nun jedes der Ausgangsintervalle in zwei angrenzend disjunkte Intervalle, deren Vereinigung das jeweilige Ausgangsintervall ergibt. Dieser Schritt dient lediglich der Veranschaulichung und ist ohne Kenntnis mindestens eines dieser Teilintervalle nicht durchzuführen (die Kenntnis eines der Teilintervalle reduziert im Übrigen das Problem auf eine Kombination aus Differenzen und Vereinigungen, die allesamt lösbar sind). Nehmen wir also folgende Teilintervalle: $\Delta_{(s,t)}$, $\Delta_{(t,u)}$ und $\Delta_{(u,v)}$. Aus den vorhergehenden Betrachtungen ist bekannt, dass die Vereinigung aller dieser Intervalle genau $\Delta_{(s,v)}$ ergibt:

$$\begin{aligned} (\Delta_{(s,t)} \cup (\Delta_{(t,u)} \cup \Delta_{(u,v)})) = \Delta_{(s,v)} \\ ((\Delta_{(s,t)} \cup \Delta_{(t,u)}) \cup \Delta_{(u,v)}) = \Delta_{(s,v)} \end{aligned}$$

[4] Das Beispiel funktioniert ebenso mit der Annahme, φ würde entfernt. An dieser Stelle genügt allerdings ein einziger Fall.

Dabei ergeben die Vereinigungen jeweils zweier dieser Teilintervalle die hier betrachteten Ausgangsintervalle (die Teilintervalle sind überdies so gewählt, dass die Vereinigung der Ausgangsintervalle mit dem jeweils Dritten genau das oben aufgeführte Gesamtresultat ergibt):

$$(\Delta_{(t,u)} \cup \Delta_{(u,v)}) = \Delta_{(t,v)}$$
$$(\Delta_{(s,t)} \cup \Delta_{(t,u)}) = \Delta_{(s,u)}$$

Betrachten wir nun Letztere dieser beiden Gleichungen. Aus der obigen Annahme, dass $\varphi \in D^+_{(s,u)}$, folgt entsprechend der Berechnungsvorschrift für die Vereinigung angrenzend disjunkter Intervalle (vgl. Abschnitt 3.2.5):

$$\begin{aligned} &\varphi \in ((D^+_{(s,t)} \cup D^+_{(t,u)}) \setminus (D^-_{(s,t)} \cup D^-_{(t,u)})) \\ \Rightarrow\ &\varphi \notin (D^-_{(s,t)} \cup D^-_{(t,u)}) \end{aligned}$$

Da, wie bereits gesehen, φ nur in einem der beiden vereinigten Intervalle hinzugefügt werden kann ($\varphi \notin (D^+_{(s,t)} \cap D^+_{(t,u)})$), gibt es hier zwei Fälle, die unterschieden werden müssen:

1. $\varphi \in D^+_{(s,t)}$:
   In diesem Fall kann die Information, dass im Intervall $\Delta_{(t,v)}$ keine Änderung bezüglich φ erfolgt, direkt verwertet werden und aus der Vereinigung $(\Delta_{(s,t)} \cup \Delta_{(t,v)}) = \Delta_{(s,v)}$ folgt, dass hier $\varphi \in D^+_{(s,v)}$.
2. $\varphi \in D^+_{(t,u)}$:
   Dieser Fall ist dagegen etwas komplizierter. Die Voraussetzung, dass $\Delta_{(t,v)}$ keine Änderung bezüglich φ enthält, erfordert hier, dass $\varphi \in D^-_{(u,v)}$, wie leicht zu sehen ist, wenn man die Berechnungsvorschrift für diese Vereinigung heranzieht. Da in diesem Fall aber auch gilt, dass $\varphi \notin (D^+_{(s,t)} \cup D^-_{(s,t)})$ (s.o.), ergibt die Vereinigung der drei Intervalle $(\Delta_{(s,t)} \cup (\Delta_{(t,u)} \cup \Delta_{(u,v)})) = \Delta_{(s,v)}$ bezüglich φ: $\varphi \notin D^+_{(s,v)}$ und $\varphi \notin D^-_{(s,v)}$.

Wie nun ersichtlich ist, führen diese beiden Fälle zu verschiedenen Ergebnissen bei der Vereinigung der drei Teilintervalle. Somit ist es zur Berechnung der Vereinigung $(\Delta_{(s,u)} \cup \Delta_{(t,v)})$ bzw. $(\Delta_{(t,v)} \cup \Delta_{(s,u)})$ unerlässlich, diese Fälle zu unterscheiden. Im Allgemeinen ist jedoch eben keine Information über das Intervall $\Delta_{(s,t)}$ oder das Intervall $\Delta_{(t,u)}$ vorhanden (andernfalls reduziert sich das Problem, wie erwähnt, auf eine Meets / Met-by Relation). Die Overlaps / Overlapped-by Relation zeichnet sich also gerade durch diese fehlende Information aus, womit eine Unterscheidung der beiden Fälle nicht möglich ist. Aus diesem Grunde kann keine Berechnungsvorschrift angegeben werden, die zu einem eindeutigen Ergebnis führt. Für den Fall, dass ein solches nicht bestimmt werden kann, gilt nun, dass das Ergebnis der Vereinigung undefiniert sein muss.

Für den Schnitt ergibt sich die notwendige Überlappung direkt aus der Definition dieser Relation. Genauer gesagt gilt die Bedingung zur Überlappung für alle Zeitpunkte X mit $X \succ t \wedge X \prec u$. Damit ergibt sich für einen angenommenen Schnitt Δ_C je nach Reihenfolge der Operanden:

$$\begin{aligned} C &= \begin{cases} (S_B, F_A), \text{wenn } S_A \preceq S_B \wedge F_A \preceq F_B \\ (S_A, F_B), \text{wenn } S_B \prec S_A \wedge F_B \prec F_A \end{cases} \\ &= (t, u) \end{aligned}$$

Auch dieses Ergebnis ist nicht mit einem der Ausgangsintervalle identisch, weshalb wiederum eine Berechnungsvorschrift angegeben werden muss, die dieses erzeugt. Um zu zeigen, dass dies nicht möglich ist, verwenden wir dieselbe Argumentation wie dies bereits bei der Vereinigung erfolgt ist. Da, wie gesehen, nicht unterschieden werden kann, ob ein Element φ in $\Delta_{(s,t)}$ oder in $\Delta_{(t,u)}$ hinzugefügt wird, kann genau letzteres Intervall nicht eindeutig gebildet werden. Somit muss der Schnitt der beiden Intervalle undefiniert sein.

Wie bereits mehrfach erwähnt, kann auch die Differenz nicht gebildet werden, wenn der Schnitt undefiniert ist. Aus diesem Grund muss also auch hier das Ergebnis undefiniert sein. □

3.3 Zusammenfassung

Wie wir gesehen haben, lässt sich für jede mögliche paarweise Verknüpfung von temporalen Intervallen eine Regel aufstellen, die das Ergebnis bestimmt und, sofern dieses nicht undefiniert ist, auch eine Berechnungsvorschrift angeben, die das gewünschte Zielintervall erzeugt. Allerdings bleibt festzustellen, dass in vielen Fällen keine gültige Verknüpfung gefunden werden kann. So gibt es zwei Relationen, bei denen keine einzige Operation zu einem gültigen Ergebnis führt – der Grund ist in beiden Fällen fehlende Information. Bei der Before / After Relation ist dies leicht zu sehen, da hier schlicht ein Bereich zwischen den beiden Intervallen besteht, der von keinem der beiden abgedeckt wird. Bei der Overlaps Relation ist gerade der Inhalt der Überlappung nicht explizit bekannt.

Die restlichen undefinierten Ergebnisse sind ebenfalls intuitiv leicht verständlich bzw. ergeben sich aus den zu Anfang des Kapitels aufgestellten Definitionen. So sind leere

Intervalle, von denen man intuitiv annehmen könnte, dass sie beim Schnitt disjunkter Intervalle entstehen könnten (in Anlehnung an bekannte Phänomene aus der Mengenlehre), explizit ausgeschlossen. Gleiches gilt für die Fälle nicht definierter Differenzen zwischen Intervallen – Konstrukte, wie etwa negative Intervalle, haben wir mittels der Definition der Differenz ausgeschlossen.

Im Hinblick auf die in der Einleitung aufgeworfene Problemstellung bleibt festzustellen, dass der Kalkül die geforderte Verknüpfung von Weltzuständen ermöglicht, jedoch bei der Anwendung einigen Einschränkungen unterworfen ist, die nicht außer acht gelassen werden dürfen. So lässt sich eine Verkettung angrenzend disjunkter Intervalle mittels der aufgestellten Berechnungsvorschrift problemlos vornehmen. Liegt dieser Fall nicht vor, so wird, wie oben beschrieben, zusätzliche Information benötigt. Eine Before / After Relation beispielsweise lässt sich mittels eines dritten Intervalls, welches die Lücke zwischen den beiden ersten Intervallen abdeckt, in eine Meets oder eine Overlaps Relation überführen. Im ersteren Fall kann dann die Berechnung vorgenommen werden, im letzteren Fall fehlt, wie erwähnt, noch immer die Information über den Inhalt der Überlappung. Sofern dieser allerdings bekannt ist, lässt sich mittels der Differenz mit einem der Ausgangsintervalle (die hier entstehenden Relationen sind Starts / Started-by bzw. Finishes / Finished-by) wiederum eine Meets Relation herstellen.

Auf diese Weise können die zur Verfügung stehenden Intervalle verwendet werden, um zunächst über Zwischenschritte die berechenbaren Relationen herzustellen. Die Frage nach einem Algorithmus, der diese benötigten Zwischenergebnisse sowie ggf. fehlende Information identifiziert, bleibt dabei an dieser Stelle offen. Ebenso lassen sich die Effekte der Reihenfolge der Verknüpfungen in komplexen Ausdrücken weiter untersuchen. Dass diese Reihenfolge nicht ignoriert werden kann, kann ist leicht ersichtlich, wenn man in Betracht zieht, dass bei jeder Umstellung komplexer Sätze unseres Kalküls sich die Relationen der einzelnen Intervalle verändern. Dies findet schließlich Ausdruck in der strikten Klammersyntax, die wir aus eben diesem Grund eingeführt haben. In einigen Fällen ließe sich die Klammerung allerdings umstellen, ohne dass die Semantik des Ausdrucks sich ändert – eine genauere Untersuchung dieses Sachverhalts wird im Rahmen dieser Arbeit aber nicht vorgenommen.

Kapitel 4

Fazit / Ausblick

In der vorliegenden Arbeit haben wir die Modellierung von Weltzuständen und die Verknüpfung von Intervallen zwischen diesen untersucht. Motiviert durch spezielle Probleme der Wissenrepräsentation im beispielhaften Zusammenhang mit Agentensystemen, insbesondere im Hinblick auf die Planung rationalen Verhaltens, haben wir als formale Grundlage unserer späteren Ausführungen auf die bekannten Beschreibungslogiken zurückgegriffen. Anhand dieser haben wir die verwendeten Weltzustände und Intervalle definiert und einen Kalkül erarbeitet, welcher auf Basis der Intervallrelationen nach Allen Regeln zu deren Verknüpfung bereitstellt. Alle diese Regeln wurden einer genauen Untersuchung unterzogen und ihre Korrektheit dabei formal bewiesen.

Wie bereits in der Zusammenfassung des vorherigen Kapitels erläutert, erfüllt der genannte Kalkül dabei die Anforderungen der eingangs aufgeworfenen Problemstellung mit einigen Einschränkungen. Wir konnten bereits bei der Erläuterung der Grundlagen zeigen, dass sich jeder beliebige Weltzustand aus einem Initialzustand und dem Intervall zwischen beiden ermitteln lässt, was uns zu der Erkennnis brachte, dass eine Betrachtung der Beziehungen von Intervallen untereinander von entscheidender Relevanz ist. Unsere gewählte Repräsentation der Intervalle erlaubt daher die Verknüpfung dieser, wie wir sie oben dargestellt haben. In Bezug auf das motivierende Beispiel lassen sich mit dieser Repräsentation nicht nur Weltzustände bzw. Aktionen und Ereignisse, die diese erzeugen, identifizieren, die mit einem bekannten Risiko behaftet sind. Durch die gewählte Modellierung lassen sich ebenso Intervalle ausmachen, in denen eine riskante Situation beendet wird, so dass diese auch verwendet werden können, um geeignete Gegenstrategien in Bezug auf mögliche Gefahren für ein gestecktes Ziel entwickeln zu können.

Offen bleibt allerdings an dieser Stelle die Frage nach der Beschaffung fehlender Informationen. Wie wir gesehen haben, können Fälle auftreten, in denen eine Verknüpfung von Intervallen aufgrund fehlender Information (beispielsweise bei Lücken im abgedeckten Zeitraum) kein gültiges Ergebnis liefern kann. Für einen Einsatz der hier vorgestellten Verfahren ist es ggf. notwendig, diese fehlenden Informationen zu identifizieren, damit Maßnahmen zu deren Beschaffung ergriffen werden können. Eine Betrachtung der Möglichkeiten dieser Identifikation wäre also Gegenstand nachfolgender Untersuchungen. Ebensolches gilt für die in Abschnitt 3.3 angesprochenen Regeln zur Klammerung (Assoziativität). Auch deren weitere Betrachtung wird aus unserer grundlegenden Arbeit ausgespart und kann gesondert behandelt werden.

Eine besondere Problematik im Zusammenhang mit der von uns gewählten Intervallrepräsentation sei abschließend noch angesprochen. Wie wir gezeigt haben, fällt auch die Verknüpfung zweier Intervalle, die sich gegenseitig überlappen, in den Problembereich der fehlenden Information. Da wir nicht feststellen können, zu welchem Zeitpunkt innerhalb eines Intervalls eine bestimmte darin enthaltene Änderung auftritt, fehlt uns in diesem Zusammenhang die explizite Kenntnis des Inhalts der Überlappung (vgl. Abschnitt 3.2.9). Dieses Problem ließe sich natürlich umgehen, wenn jede Änderung innerhalb eines Intervalls mit dem exakten Zeitpunkt ihres Eintretens behaftet wäre. In diesem Falle ließe sich zweifelsfrei bestimmen, zu welchem Teilintervall ein Element zugeordnet wäre und die Verknüpfung ließe sich korrekt bilden.

Wir haben jedoch bewusst auf eine solche Modellierung verzichtet: Einerseits aus dem Grund, dass im Rahmen eines Agentensystems die Wahrnehmung eines Agenten nicht zwangsläufig Änderungen registriert, sobald diese auftreten – vielmehr ist es üblich, dass die Wahrnehmung zyklisch in die Wissensbasis eingefügt wird und somit der Zeitpunkt eines Ereignisses von dem Zeitpunkt der Wahrnehmung seiner Auswirkungen differiert. Ebenso kann angenommen werden, dass auch während der Planung von Handlungen der Eintritt ihrer Effekte nicht beliebig exakt angegeben werden kann. Somit haben wir aus rein praktischen Gesichtspunkten hier auf eine solche Modellierung verzichtet. Andererseits ist die Bestimmung eines genauen Zeitpunktes des Auftretens von Effekten mitunter nicht möglich, wenn wir annehmen, dass Aktionen und Ereignisse nicht sofort zu den entsprechenden Ergebnissen führen, sondern dies einen bestimmten Zeitraum in Anspruch nimmt. So benötigt beispielsweise die Bewegung eines Fahrzeugs von einem Ort zum anderen eine gewisse Zeit, während der das Fahrzeug unterwegs ist und sich genau genommen an keinem der beiden Orte befindet. Dies führt dazu, dass lediglich der Anfang und das Ende der betreffenden Aktion mit einem genauen Zeitpunkt angegeben werden können, das Eintreten des Ergebnisses geschieht aber über den gesamten Zeitraum dazwischen.

Diese Effekte werden allerdings auch durch unsere Modellierung nicht explizit repräsentiert. Durch die Annahme, dass es zwischen zwei Zeitpunkten immer beliebig viele weitere gibt, muss auch bei uns eine Entscheidung getroffen werden, zu welchem Zeitpunkt ein Effekt eingetreten ist. In der konkreten Anwendung führt das jedoch dazu, dass für oben genannte über einen gewissen Zeitraum sich entwickelnde Änderungen der Welt einfach keine Information für bestimmte Zwischenschritte ermittelt werden kann. Hier können dann keine Teilintervalle gebildet werden, die nicht den gesamten

Zeitraum des Ereignisses oder der Aktion abdecken. Wollte man nämlich auch solche Zwischenschritte erlauben, so müsste ein Verfahren gefunden werden, welches den Fortschritt laufender Entwicklungen zu jedem Zeitpunkt berücksichtigt. Hier könnte beispielsweise mit Fuzzy-Mengen gearbeitet werden (vgl. (Russell et al., 2004, 646f)). Eine solche Modellierung erhöht allerdings die Komplexität des Sachverhaltes erheblich, weshalb wir uns entschieden haben, hier darauf zu verzichten. Auf die prinzipielle Möglichkeit sei jedoch hiermit hingewiesen.

Damit lässt sich feststellen, dass die hier behandelten Weltzustände und Intervalle noch Gegenstand vieler weiterführender Untersuchungen sein können. Unsere bisherigen Ergebnisse erlauben jedoch den Umgang mit der Problemstellung, die wir zu Beginn dieser Arbeit aufgeworfen haben, mit den genannten Einschränkungen und bieten eine geeignete Repräsentation temporaler Entwicklungen auf Basis von Beschreibungslogiken.

Literaturverzeichnis

ALLEN, JAMES F.: Maintaining knowledge about temporal intervals. *Commun. ACM*, 1983. Bd. 26(11): S. 832–843.

BAADER, FRANZ, DIEGO CALVANESE, DEBORAH L. MCGUINNESS, DANIELE NARDI, und PETER F. PATEL-SCHNEIDER (Hrsg.): *The Description Logic Handbook: Theory, Implementation, and Applications*. Cambridge University Press, 2003.

BEMELEIT, BORIS, MARTIN LORENZ, JENS SCHUMACHER, und OTTHEIN HERZOG: Risk management for transportation of sensitive goods. In *Proceedings of the 10th International Symposium on Logistics (10th ISL)*. 2005 (S. 492–498).

BRATMAN, MICHAEL: *Intentions, Plans, and Practical Reason.* Harvard University Press, 1987.

CURRY, HASKELL B.: *Foundations of mathematical logic*. McGraw-Hill Book Company, New York, San Francisco, Toronto, London, 1963.

HUSTADT, ULLRICH: Do we need the closed world assumption in knowledge representation? In F. Baader, M. Buchheit, M. A. Jeusfeld, und W. Nutt (Hrsg.), *Knowledge Representation Meets Databases*. 1994 .

LATTNER, ANDREAS D.: *Temporal Pattern Mining in Dynamic Environments*. Dissertation, Universität Bremen, 2007.

RUSSELL, STUART J., PETER NORVIG, JOHN F. CANNY, JITENDRA M. MALIK, DOUGLAS D. EDWARDS, und SEBASTIAN THRUN: *Künstliche Intelligenz: Ein moderner Ansatz*. Pearson Studium, München, 2. Ausg., 2004.

TARSKI, ALFRED: *Einführung in die mathematische Logik*. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 5. Ausg., 1977.

WINTER, REINER: *Grundlagen der formalen Logik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2. Ausg., 2001.

WOOLDRIDGE, MICHAEL: *Reasoning about Rational Agents*. The MIT Press, Cambridge, London, 2000.

WOOLDRIDGE, MICHAEL und NICHOLAS R. JENNINGS: Intelligent agents: Theory and practice. *Knowledge Engineering Review*, 1995. Bd. 10(2): S. 115–152.